



# Une Methode de decomposition de domaine pour le probleme de Heimhlotz

Bruno Desprès

## ► To cite this version:

Bruno Desprès. Une Methode de decomposition de domaine pour le probleme de Heimhlotz. [Rapport de recherche] RR-1524, INRIA. 1991. inria-00075038

**HAL Id: inria-00075038**

**<https://inria.hal.science/inria-00075038>**

Submitted on 24 May 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE  
INRIA-ROCCOUENCOURT

Institut National  
de Recherche  
en Informatique  
et en Automatique

Domaine de Voluceau  
Rocquencourt  
B.P.105  
78153 Le Chesnay Cedex  
France  
Tél.: (1) 39 63 55 11

# Rapports de Recherche

N° 1524

*Programme 6*  
*Calcul Scientifique, Modélisation et*  
*Logiciels numériques*

## UNE MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE POUR LE PROBLÈME DE HELMHOLTZ

**Bruno DESPRES**

**Septembre 1991**



★ R R - 1 5 2 4 ★

# Une méthode de décomposition de domaine pour le problème de Helmholtz

## A domain decomposition method for the Helmholtz problem

Bruno DESPRES

**Résumé:** Nous présentons une méthode itérative de décomposition de domaine sans recouvrement avec conditions de transmissions de type mixte pour le problème de Helmholtz dans un domaine borné. Nous démontrons la convergence dans le cas général par une technique énergétique, puis étudions le taux de convergence dans deux cas particuliers par des techniques spectrales.

**Abstract:** We present an iterative non overlapping domain decomposition method with Robin type transmission conditions for the Helmholtz problem in a bounded domain. We prove the convergence of the method in the general case with the help of energetic methods, then we explore the rate of convergence in two special cases with the help of spectral methods.

**Mots clés:** Décomposition de domaine. Problème de Helmholtz.

**Key words:** Domain decomposition method. Helmholtz problem.

# Chapitre 1

## Introduction

Présentons quelles sont nos motivations : nous cherchons à résoudre l'équation de Helmholtz qui décrit la propagation d'une onde monochromatique dans un milieu acoustique, borné, hétérogène et tridimensionnel. La nature physique de cette équation rend sa résolution difficile. Si l'on discrétise l'équation de Helmholtz à l'aide de la méthode des différences finies, la modélisation des problèmes tridimensionnels qui nous intéressent fait intervenir des matrices de taille 500.000 que nous inversons par des méthodes de gradient biconjugué. F. Clément [5] a montré la validité de ces méthodes pour la résolution de l'équation de Helmholtz. D'autres auteurs ont travaillé sur ce sujet. Citons J.C. Nédélec [15, 16], qui utilise les équations intégrales issues du problème pour la résolution numérique, lorsqu'on s'intéresse à la diffraction d'une onde par un obstacle. Nous nous intéressons plutôt ici à la propagation d'une onde harmonique dans un milieu localement hétérogène, cas dans lequel l'intérêt des équations intégrales est beaucoup moins évident.

Les difficultés rencontrées, essentiellement liées à la taille des calculs, nous ont poussés à nous tourner vers certaines méthodes de résolution utilisées habituellement pour des problèmes elliptiques. Un premier essai auprès des méthodes multigrilles nous a appris que l'on ne peut pas se servir d'une discrétisation de moins de 3 points par longueur d'onde caractéristique, ce qui limite énormément l'intérêt de telles méthodes. Nous avons donc examiné la méthode de décomposition de domaine, qui présente a priori l'avantage de ne pas entrer en opposition avec l'existence d'une longueur d'onde caractéristique pour le problème de Helmholtz. Cela s'est révélé beaucoup plus fructueux et a permis de définir pour un domaine borné une méthode de décomposition de domaine, itérative, sans recouvrement que nous présentons et étudions ici.

Le chapitre (2) présente le problème modèle ainsi que les problèmes qui s'en rapprochent. Nous y avons également défini le cadre fonctionnel dans lequel nous allons travailler. En effet, nous sommes en particulier intéressés par les applications de ces modèles à la sismique. Dans ces cas les coefficients qui décrivent le comportement du sous-sol présentent des discontinuités. C'est pourquoi nous avons dû clairement définir une classe suffisamment large de coefficients qui assurent l'existence et l'unicité de la solution du problème de Helmholtz correspondant.

Le chapitre (3), après des rappels bibliographiques brefs sur le cas elliptique, présente

une méthode de décomposition de domaine qui nous semble naturelle. L'originalité de notre approche réside dans la forme des conditions de transmissions que nous sommes amenés à choisir.

Au chapitre (4), nous démontrons la convergence de la méthode présentée au chapitre (3) dans un cadre très général par des méthodes d'analyse fonctionnelle.

Le chapitre (5) concerne l'étude du taux de convergence dans deux cas particuliers où l'on peut faire une étude fine du taux de convergence de la méthode par une analyse de type spectral : le cas monodimensionnel et le cas bidimensionnel pour lequel nous étudierons une méthode à deux domaines. Nous montrons que la fréquence caractéristique  $\omega$  du problème constitue un seuil. Les modes de fréquence supérieure à  $\omega$  convergent plus lentement que les modes de fréquence inférieure à  $\omega$ . Nous comparerons les taux de convergence obtenus avec ceux correspondant au cas elliptique.

Dans le chapitre (6), nous cherchons à interpréter l'existence de ce seuil, et proposons des moyens pour l'éliminer.

## Chapitre 2

# Rappels théoriques sur l'équation de Helmholtz en milieu hétérogène

### 2.1 Problème modèle et applications

Posons le problème modèle (2.1) dans un ouvert  $\Omega$  borné, inclus dans  $R^n$ , dont la frontière  $\Gamma$  possède une normale sortante  $n$  presque partout :

$$(2.1) \quad \begin{cases} (-\Delta - \omega^2)u = f & \text{dans } \Omega, \\ (\frac{\partial}{\partial n} + i\omega)u = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Le problème correspond à la propagation d'une onde monochromatique  $\tilde{u}$  de fréquence  $\omega$  dans un milieu  $\Omega$  borné homogène,  $\tilde{u} = u(x)e^{i\omega t}$ . La fonction  $f$  correspond à l'amplitude d'une excitation  $\tilde{f} = f(x)e^{i\omega t}$ . Le cas où le milieu n'est pas homogène se prend en compte en considérant deux coefficients réels, positifs,  $\mu$  et  $\rho$ , et en réécrivant (2.1) sous la forme (2.2) :

$$(2.2) \quad \begin{cases} -\nabla(\mu \nabla u) - \omega^2 \rho u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} u + i\sqrt{\frac{\rho}{\mu}} u = g & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

En fait, la condition de bord peut prendre différentes formes et recouvrir des significations physiques différentes.

Exemple 1 Considérons la propagation d'une onde sismique dans un demi-espace homogène à l'infini. Cela amène sur le plan théorique à la résolution d'un problème de Helmholtz dans  $R^n$  auquel nous rajoutons une condition de Sommerfeld rentrante ou sortante à l'infini. Cette condition s'écrit :

$$(2.3) \quad \frac{\partial}{\partial r} u \pm i\omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} + \frac{u}{r} = O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Remplaçons cette condition à l'infini par une condition absorbante du premier ordre placé

à distance finie que nous écrivons :

$$(2.4) \quad \frac{\partial}{\partial n} u + i\omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} u = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Faisons ici référence à Goldstein [9], Bayliss [2] et Turkel [2] pour la validation théorique d'une telle approche.

Exemple 2 Regardons le problème de l'acoustique d'une salle dans un volume  $\Omega$  borné. Un coefficient physique complexe  $\zeta$  intervient par:

$$(2.5) \quad \frac{\partial}{\partial n} u + i\zeta u = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Le coefficient  $\zeta$  traduit les propriétés d'absorption de la paroi de la salle et peut dépendre de  $\omega$  et du point de la paroi  $\Gamma$ .  $\zeta$  s'appelle l'impédance acoustique de la paroi. Les différents problèmes possèdent les mêmes propriétés que le problème modèle que nous étudierons prioritairement. Néanmoins, nous indiquerons à chaque fois les conditions sur les différents coefficients  $\mu$ ,  $\rho$  et  $\zeta$  nécessaires à l'établissement d'équations bien posées.

## 2.2 Existence et unicité de la solution du problème modèle

L'approche que nous allons exposer ici est, comme il est classique pour le problème de Helmholtz, fondée sur l'alternative de Fredholm. La formulation variationnelle de l'équation nous permet de définir naturellement le cadre fonctionnel de notre problème modèle. Nous appelons solution faible du problème (2.1) toute fonction  $u$  de  $H^1(\Omega)$  telle que :

$$(2.6) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \text{pour } f \in H^1(\Omega)',$$

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v - \omega^2 u \cdot v) dx + i\omega \int_{\Gamma} u \cdot v d\sigma =_{H^1(\Omega)'} \langle f, v \rangle_{H^1(\Omega)}.$$

Nous allons munir  $H^1(\Omega)$  d'une norme équivalente à la norme canonique de  $H^1(\Omega)$ .

**Lemme 2.1**  $(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \omega \int_{\Gamma} |u|^2)^{1/2}$  est une norme équivalente pour  $H^1(\Omega)$ .

**Preuve**

C'est une variante de l'inégalité de Poincaré [11]. *fin de la preuve*

Notons  $a$  et  $b$  les deux formes bilinéaires sur  $H^1(\Omega)$  suivantes :

$$(2.7) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} + i\omega \int_{\Gamma} u \cdot \bar{v},$$

$$(2.8) \quad b(u, v) = \omega^2 \int_{\Omega} u \bar{v}.$$

L'application du lemme de Lax-Milgram nous permet d'énoncer le lemme suivant :

### Lemme 2.2

$$(2.9) \quad \exists! u \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), a(u, v) =_{H^1(\Omega)'} \langle f, v \rangle_{H^1(\Omega)}$$

et l'application  $f \rightarrow u$  est linéaire continue de  $H^1(\Omega)'$  dans  $H^1(\Omega)$ .

### Preuve

elle se fait en vérifiant une condition inf-sup liée à la norme énoncée au lemme (ref121).  
fin de la preuve

Montrons maintenant que  $b$  est une perturbation compacte de  $a$ , au sens du lemme suivant :

**Lemme 2.3** Soit  $\beta$  l'application de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$ ,

$$(2.10) \quad \forall v \in H^1(\Omega), a(\beta(u), u) = b(u, v).$$

$\beta$  est une perturbation compacte de l'unité dans  $H^1(\Omega)$ .

### Preuve

soit  $u_n$  une suite bornée dans  $H^1(\Omega)$ ,

$$(2.11) \quad \exists C > 0, \forall n, \|u_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C.$$

Par compacité, il existe  $u$  appartenant  $H^1(\Omega)$ , ainsi qu'une sous suite de  $u_n$ , toujours notée  $u_n$ , qui converge vers  $u$  faiblement dans  $H^1(\Omega)$  et fortement dans  $L^2(\Omega)$ . Grâce au lemme (2.1),  $\beta(u_n)$  converge fortement vers  $\beta(u)$  dans  $H^1(\Omega)$ . fin de la preuve

Dans le cas où le second membre  $f$  de l'équation variationnelle (2.6) est nul, l'équation que nous avons à résoudre s'écrit :

$$(2.12) \quad u + \beta(u) = 0, \quad u \in H^1(\Omega).$$

Nous sommes donc dans les conditions de l'alternative de Fredholm. L'existence de  $u$  est une conséquence de l'unicité. Nous énonçons cela dans le théorème suivant :

**Théorème 2.1** L'unique solution de

$$(2.13) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \omega^2 \int_{\Omega} u \cdot v + i\omega \int_{\Gamma} u \cdot v = 0, \forall v \in H^1(\Omega),$$

est  $u \equiv 0$  dans  $\omega$ . De plus :

$$(2.14) \quad \forall f \in H^1(\Omega)', \quad \exists! u \in H^1(\Omega)$$

$$(2.15) \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \omega^2 \int_{\Omega} u \cdot v + i\omega \int_{\Gamma} u \cdot v = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne la dualité  $H^1(\Omega)' - H^1(\Omega)$ .



**Preuve**

prenons  $v = \bar{u}$  dans (2.13),

$$(2.16) \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \omega^2 \int_{\Omega} |u|^2 + i\omega \int_{\Gamma} |u|^2 = 0.$$

Séparant partie réelle et partie imaginaire, nous avons :

$$(2.17) \quad \int_{\Gamma} |u|^2 = 0, \quad \text{donc } u \equiv 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Or :

$$(2.18) \quad \frac{\partial}{\partial n} u + i\omega u = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad \text{donc}$$

$$(2.19) \quad \frac{\partial}{\partial n} u \equiv 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Sous des hypothèses standards de régularité sur  $\Gamma$ , nous savons par un théorème de Holmgren [6] que  $u$  est analytique jusqu'au bord,. Donc par continuation unique :

$$(2.20) \quad u \equiv 0 \quad \text{dans } \Gamma.$$

*fin de la preuve*

## 2.3 Existence et unicité de la solution du problème avec coefficients variables

Que se passe-t-il pour des problèmes où nous réintroduisons des coefficients  $\mu, \rho, \xi$  et un terme source de bord  $g$  ? Appelons solution faible du problème (2.2) toute fonction  $u$  de  $H^1(\Omega)$  telle que pour  $f \in H^1(\Omega)'$ ,  $g \in [H^{1/2}(\Gamma)]'$ ,  $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$(2.21) \quad \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v - \omega^2 \int_{\Omega} \rho u \cdot v + i \int_{\Gamma} \xi u \cdot v = \langle f, v \rangle + \langle g, v \rangle_{\Gamma},$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma}$  désigne la dualité  $H^{-1/2}(\Gamma) - H^{1/2}(\Gamma)$ . Prenons les notations suivantes :

$$(2.22) \quad \langle F, v \rangle = \langle f, v \rangle + \langle g, v \rangle_{\Gamma}, \quad F \in H^1(\Omega)', \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

$$(2.23) \quad a(u, v) = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla \bar{v} + i \int_{\Gamma} \xi u \cdot v,$$

$$(2.24) \quad b(u, v) = \omega^2 \int_{\Omega} \rho u \cdot v$$

La formulation variationnelle (2.21) se réécrit :

$$(2.25) \quad a(u, v) + b(u, v) = \langle F, v \rangle, \quad F \in H^1(\Omega)', \quad u \in H^1(\Omega), \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Nous avons alors le :

**Lemme 2.4** *Sous les hypothèses :*

$$(2.26) \quad \mu \in L^\infty(\Omega), 0 < \mu_{\min} \leq \mu \leq \mu_{\max},$$

$$(2.27) \quad \rho \in L^\infty(\Omega), 0 < \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max},$$

$$(2.28) \quad \begin{cases} \xi \in L^\infty(\Omega), 0 < \xi_{\min} \leq |\xi| \leq \xi_{\max}, \\ \operatorname{Re}(\xi) \text{ est de signe réel, strictement positif,} \end{cases}$$

*nous avons les résultats suivants :*

$$(2.29) \quad \begin{aligned} (i) \quad & \forall F \in H^1(\Omega)', \exists ! u \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), a(u, v) =_{H^1(\Omega)'} \langle F, v \rangle_{H^1(\Omega)}, \\ (ii) \quad & \text{soit } \beta \text{ l'application de } H^1(\Omega) \text{ dans lui-même,} \end{aligned}$$

$$(2.30) \quad \forall v \in H^1(\Omega), a(\beta(u), v) = b(u, v),$$

$\beta$  est une perturbation compacte de l'unité dans  $H^1(\Omega)$ .

### Preuve

Elle est en tout point identique à celles du problème modèle précédent. *fin de la preuve*

Nous sommes donc dans les conditions d'application de l'alternative de Fredholm. Nous avons besoin d'un résultat de continuation unique à partir du bord équivalent du théorème de Holmgren dans le cas du problème modèle (2.1). Pour cela, nous avons fait appel à un théorème de L. Hormänder [10], que nous énonçons dans le lemme (2.5). sous la forme qui nous interesse ici :

**Lemme 2.5** *Soit  $P$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  à coefficients mesurables bornés. Soit  $P_m$  sa partie principale supposée elliptique à coefficients  $C^1$ . Soit  $\psi$  une fonction de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  telle que pour  $x_0$  donné de  $\Omega$  :*

$$(2.31) \quad D\psi(x_0) \neq 0$$

$$(2.32) \quad \psi(x) = \psi(x_0) \text{ est une surface fortement pseudo-convexe,}$$

*alors il existe un voisinage  $\Omega_1$  de  $x_0$ , tel que si une fonction  $u$  vérifie :*

$$(2.33) \quad u \in H_{loc}^m(\Omega_1),$$

$$(2.34) \quad Pu = 0 \text{ dans } \Omega_1,$$

$$(2.35) \quad u = 0 \text{ pour } \psi(n) > \psi(x_0), x \in \Omega_1,$$

*alors*

$$(2.36) \quad u = 0 \text{ dans } \Omega_1.$$

### Preuve

Voir [10] théorème 8.9.1. page 224. *fin de la preuve*

Pour la définition d'une surface pseudo-convexe, nous renvoyons à L. Hormänder [10] (page 204). Rappelons simplement que pour que la surface  $\psi(x) = \psi(x_0)$  soit fortement pseudo-convexe en  $x_0$ , il suffit que l'équation en  $\tau$  :

$$(2.37) \quad P_m(\xi + \tau N) = 0,$$

$N$  est la normale à la surface en  $x_0$ ,  $\xi$  est un vecteur non proportionnel à  $N$ , n'ait pas de racines doubles  $\tau$ . La partie principale de l'opérateur de Helmholtz est elliptique, ce qui fait que toutes les surfaces sont fortement pseudo-convexes, à condition que l'on puisse définir une normale presque partout. On s'en convainc rapidement en regardant la condition sur  $P_m(\xi + \tau N)$  en dimension 3 par exemple. Soit  $N = (N_1, N_2, N_3)$  et  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ , alors :

$$(2.38) \quad P_m(\xi + \tau N) = 0 \quad \text{implique}$$

$$(2.39) \quad (\xi_1 + \tau N_1)^2 + (\xi_2 + \tau N_2)^2 + (\xi_3 + \tau N_3)^2 = 0.$$

Si cette équation admet une racine double en  $\tau$ , alors  $\Delta = 0$ , c'est-à-dire :

$$(2.40) \quad (\xi_1 N_1 + \xi_2 N_2 + \xi_3 N_3)^2 - (N_1^2 + N_2^2 + N_3^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) = 0,$$

d'où

$$(2.41) \quad (\xi_1 N_2 - \xi_2 N_1)^2 + (\xi_2 N_3 - \xi_3 N_2)^2 + (\xi_1 N_3 - \xi_3 N_1)^2 = 0,$$

$\xi$  et  $N$  seraient donc proportionnels, ce qui est exclus. Nous aurons également besoin d'un théorème que l'on peut trouver chez [7], présenté dans le lemme suivant.

**Lemme 2.6** Soit  $u \in H^1(\Omega)$  est une solution faible de :

$$(2.42) \quad Lu = f, f \in L^2(\Omega).$$

Supposons que  $L$  est un opérateur strictement elliptique d'ordre 2, de coefficients lipschitziens uniformément sur  $\Omega$ . Supposons de plus que  $\partial\Omega$  soit  $C^2$ , et que :

$$(2.43) \quad \exists \varphi \in H^2(\Omega), u - \varphi \in H_0^1(\Omega), \text{ alors}$$

$$(2.44) \quad u \in H^2(\Omega) \text{ et } \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C[\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\varphi\|_{H^2(\Omega)}]$$

### Preuve

Voir [7] théorème 8.12. page 186. *fin de la preuve*

Ces deux lemmes vont nous permettre d'énoncer le lemme préparatoire suivant :

**Lemme 2.7** Soit  $O$  un ouvert borné de  $R^n$  à frontière  $C^2$ . Soit  $\mu$  un coefficient réel  $C^1$  dans  $O$  et  $\rho$  un coefficient réel mesurable borné dans  $O$ . Soit  $u$  solution de :

$$(2.45) \quad -\nabla(\mu\nabla u) - \omega^2 \rho u = 0 \text{ dans } O,$$

$$(2.46) \quad u = 0 \text{ sur } \partial O,$$

$$(2.47) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial O, \text{ alors}$$

$$(2.48) \quad u = 0 \text{ dans } O.$$

**Preuve**

Nous sommes dans les conditions d'application du lemme (2.6). En effet, prenons  $\varphi = 0$ , et  $f = \omega^2 \rho u + u$ . Alors  $u$  est solution de :

$$(2.49) \quad \begin{aligned} -\nabla(\mu\nabla u) + u &= f, \quad u \in H^1(O). \\ f &\in L^2(O), \text{ et } \mu \in C^1(O) \text{ donc } u \in H^2(O). \end{aligned}$$

Prolongeons  $u$  par 0 en dehors de  $O$  dans  $R^n$ . Grâce à (2.46) et (2.47) :

$$(2.50) \quad u \in H^2(R^n).$$

Cela va nous permettre d'exploiter le lemme (2.5). En effet,  $u \in H_{loc}^2(R^n)$  et la surface de séparation est fortement pseudo-convexe.  $u$  est dans  $H^2(O)$  solution de :

$$(2.51) \quad -\nabla(\mu\nabla u) - \omega^2 \rho u = 0, \text{ donc est solution de}$$

$$(2.52) \quad -\Delta u - \frac{1}{\mu} \nabla \mu \cdot \nabla u - \frac{1}{\mu} \omega^2 \rho u = 0$$

Posons :

$$(2.53) \quad a_i = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} \text{ dans } \overline{O},$$

$$(2.54) \quad a_i = 0 \text{ dans } R^n - \overline{O}.$$

$$(2.55) \quad a_0 = \frac{1}{\mu} \omega^2 \rho \text{ dans } \overline{O},$$

$$(2.56) \quad a_0 = 0 \text{ dans } R^n - \overline{O}.$$

Alors  $a_0, a_1, a_2$  et  $a_3$  sont des coefficients mesurables bornés, et  $u$  est solution de :

$$(2.57) \quad -\Delta u - a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} - a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} - a_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} - a_0 u = 0 \text{ dans } R^n.$$

Remarquons que  $u$  est nul d'un côté de la surface  $\partial O$ , que  $u \in H_{loc}^2$ . Donc :

$$(2.58) \quad \forall n \in O, \exists \omega_x \text{ voisinage de } x, u \equiv 0 \text{ dans } \omega_x.$$

Notons pour un  $x_0$  particulier  $B(x_0, \Omega) = \{x \in R^n, |x - x_0| \leq \Omega\}$ . Soit  $x_0 \in \partial O$ . Nous savons que:

$$(2.59) \quad \exists \Omega_0 > 0, u \equiv 0 \text{ dans } B(x_0, \Omega).$$

Notons :

$$(2.60) \quad R = \{\Omega \in R^+, u \equiv 0 \text{ dans } B(x_0, \Omega)\}.$$

Supposons que  $R$  admette un plus grand élément  $R_0$ . Donc :

$$u \equiv 0 \text{ dans } B(x_0, R_0).$$

Cela permet de réitérer le raisonnement de prolongement à partir de la frontière de  $B(x_0, R_0)$ . Donc :

$$(2.61) \quad \forall x \in \partial(B(x_0, R_0)),$$

$$(2.62) \quad \exists B(x, \Omega_x) \text{ voisinage de } x, u \equiv 0 \text{ dans } \omega_x.$$

Faisons un schéma (2.1).

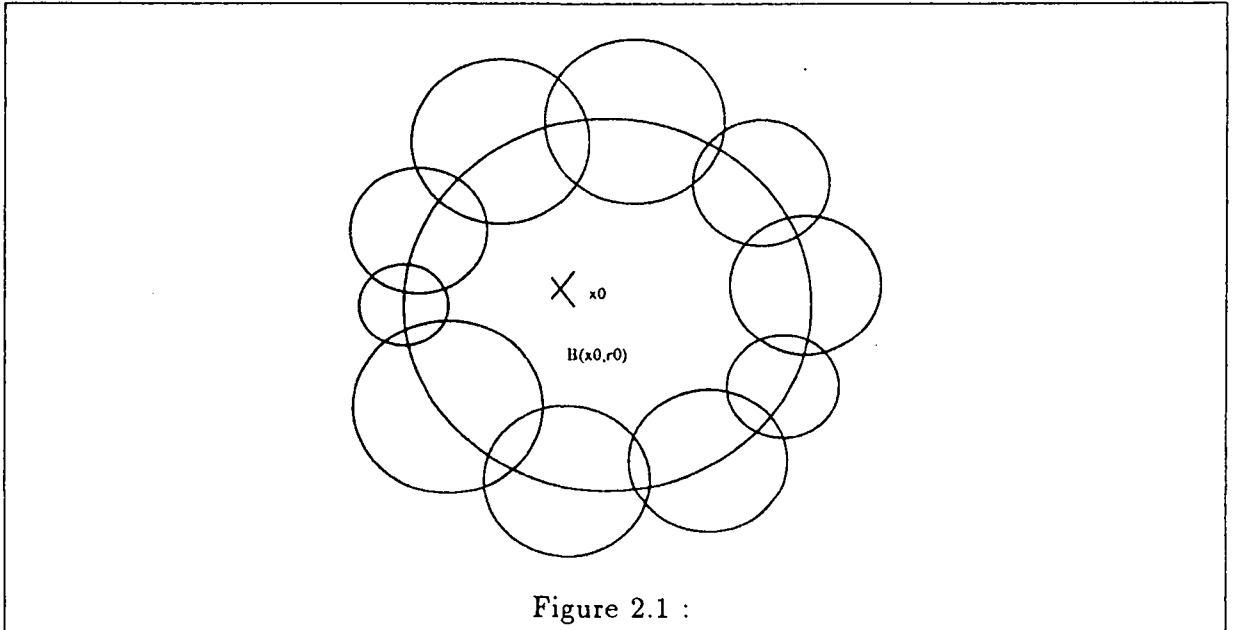


Figure 2.1 :

Dû à la compacité de  $\partial(B(x_0, R_0))$  dans  $R^n$ , nous avons :

$$(2.63) \quad \exists \alpha > 0, \forall x \in \partial(B(x_0, R_0)),$$

$$(2.64) \quad u \equiv 0 \text{ dans } B(x, \alpha)$$

Donc  $u \equiv 0$  dans  $B(x_0, R_0 + \alpha)$ . Cela contredit le fait que  $R_0$  est le plus grand élément de  $R$ . Donc  $u \equiv 0$  dans  $R^n$  entier et donc dans  $O$  entier. *fin de la preuve*

Modifions les hypothèses présentes dans le lemme (2.7). Nous obtenons le :

**Corollaire 2.1** Soient  $\mu$  et  $\rho$  deux coefficients mesurables bornés dans  $O$ , un ouvert borné connexe par arcs de  $R^n$ . De plus,  $\mu$  est  $C^1$  dans  $\overline{O}$ . Supposons que la frontière de  $O$  soit  $C^2$  sur le morceau  $\Gamma$ . Soit  $u$  solution de :

$$(2.65) \quad -\nabla(\mu \nabla u) - \omega^2 \rho u = 0 \text{ dans } O,$$

$$(2.66) \quad u = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$(2.67) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma, \text{ alors}$$

$$(2.68) \quad u \equiv 0 \text{ dans } O.$$

**Preuve**

Soit  $x_0$  un point de  $\Gamma$ , non situé sur le bord de  $\Gamma$ . Soit  $x$  un point de  $O$  qui est connexe par arcs, donc nous pouvons définir un cylindre  $C_{x,x_0}$  tel que :

$$(2.69) \quad C_{x,x_0} \text{ soit un ouvert de } R^n,$$

$$(2.70) \quad x_0, x \in C_{x,x_0}.$$

Voir figure (2.2).

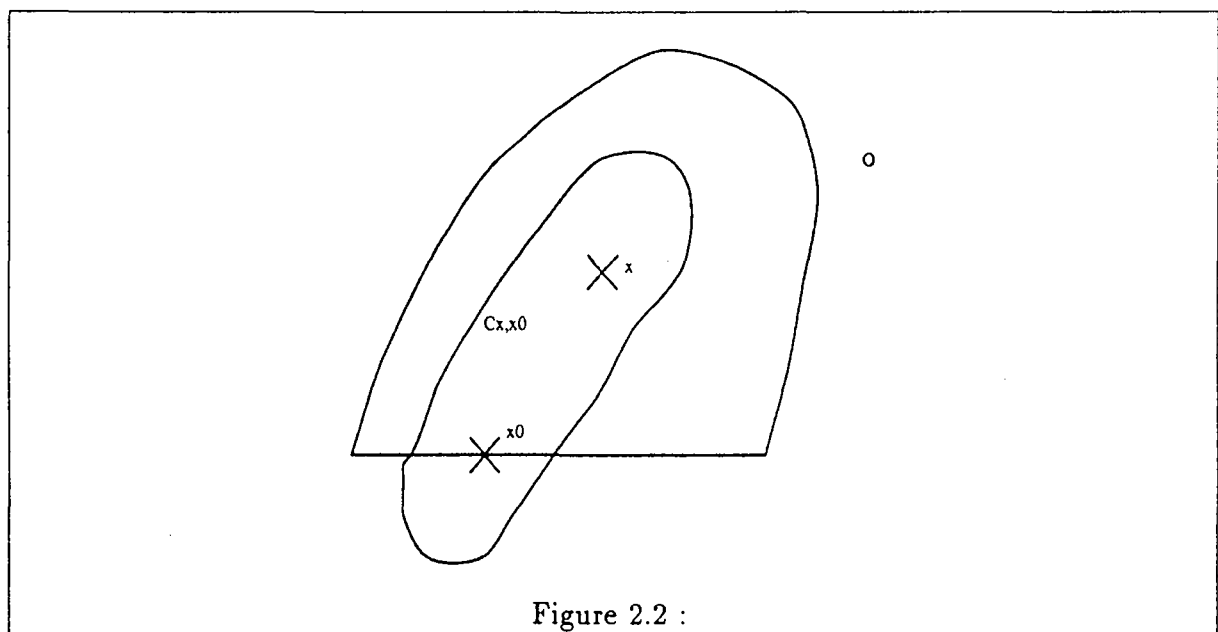


Figure 2.2 :

Nous pouvons alors définir des ouverts  $F_R$  tels que :

$$(2.71) \quad \forall R > 0, F_R \subset C_{x,x_0}$$

$$(2.72) \quad R > R' \rightarrow F'_R \subset F_R$$

$$(2.73) \quad F_R \text{ est de frontière } C_2,$$

$$(2.74) \quad \forall R, x_0 \in F_R,$$

$$(2.75) \quad \exists R_1, x \in F_{R_1},$$

$$(2.76) \quad F_R \text{ dépend continuellement de } R.$$

Les  $F_R$  tiennent le même rôle dans démonstration que les  $B_R$  dans la démonstration du lemme (2.7). La démonstration est la même, à cette distinction près. *fin de la preuve*

Le corollaire (2.1) va nous permettre de définir des conditions sur  $\mu$  et  $\rho$  dans lesquelles des discontinuités de  $\mu$  et  $\rho$  sont acceptées et qui nous garantissent l'unicité de la solution du problème (2.2) dans  $\Omega$ . Soit  $\Omega_i, i \in I$  une partition de  $\Omega$  en un nombre fini d'ouverts, tels que les diverses interfaces soient suffisamment régulières au moins sur un bout de chaque interface. Notons

$$G_1 = \{\text{ensemble des } \Omega_i \text{ contigus à } \Gamma\},$$

$$G_{i+1} = \{\text{ensemble des } \Omega_i \text{ contigus à } G_i \text{ et qui n'appartienne à aucun } G_r, r \leq i\}.$$

Nous avons le théorème (2.2) :

**Théorème 2.2** *Sous les conditions :*

$$(\mu, \rho) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Omega),$$

$$\mu|_{\Omega_i} \in C^1(\Omega_i), i \in I,$$

*et sous les conditions du lemme (2.4), il y a existence et unicité de la solution du problème (2.2).*

### Preuve

Ecrivons la formulation variationnelle pour  $F = 0$ , et prenons  $v = \bar{u}$ .

$$\int_{\Omega} \mu \nabla u \nabla \bar{u} - \omega^2 \rho u \bar{u} + i \int_{\Omega} \xi u \bar{u} = 0$$

$Re(\xi)$  a un signe constant non nul donc :

$$\forall \Omega_i \in G_1, u = 0 \text{ sur } \partial G_1 \cap \Gamma,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial G_1 \cap \Gamma \text{ car } \frac{\partial u}{\partial n} + i \xi u = 0.$$

De plus,

$$-\nabla(\mu \nabla u) - \omega^2 \rho u = 0 \text{ dans } \Omega_i.$$

Donc grâce au corollaire (2.1),  $u = 0$  dans  $\Omega_i, \forall \Omega_i \in G_1$ . Supposons maintenant que :

$$u = 0 \text{ dans } G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_i.$$

$u \in H^1(\Omega)$  donc  $u$  est continue sur  $\overline{G_i} \cap \overline{G_{i+1}}$ .

A partir de la formulation variationnelle, nous montrons que  $\mu \frac{\partial u}{\partial n}$  est continu sur  $\overline{G_i} \cap \overline{G_{i+1}}$   
Donc :

$$u \equiv 0 \text{ sur } \overline{G_i} \cap \overline{G_{i+1}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv 0 \text{ sur } \overline{G_i} \cap \overline{G_{i+1}}$$

$$-\nabla(\mu \nabla u) - \omega^2 \rho u = 0 \text{ dans } \Omega_k \subset G_{i+1}.$$

Donc  $u \equiv 0$  dans  $G_{i+1}$ . C'est donc que  $u \equiv 0$  dans  $\Omega$ . *fin de la preuve*

### Remarques

- a) Tout ceci nous a permis de montrer que le problème de Helmholtz est bien posé pour une classe large de coefficients. Cette classe présente des discontinuités.
- b) Cette idée de "progression à partir du bord" est une caractéristique du problème de Helmholtz pour lequel les seules estimations simples existent sur le bord. Nous retrouverons cette idée lors de l'étude de la convergence de la méthode de décomposition de domaine.
- c) Les résultats que nous avons présentés ici sont assez classiques et la méthode de démonstration n'est pas originale. Toutefois nous avons choisi de présenter une démonstration détaillée sur les fonctions  $\rho$  et  $\mu$  garantissant un résultat d'existence et d'unicité.



# Chapitre 3

## Decompositions de domaine

### 3.1 Rappels bibliographiques

Les méthodes de décomposition de domaines furent introduites en analyse numérique pour résoudre des problèmes de type elliptique coercif. Une littérature importante est dédiée à ce sujet. Néanmoins les différents auteurs utilisent la décomposition de domaine de diverses manières. Voici quelques exemples. P.L. Lions [13, 14, 12] s'intéresse dans un cas modèle à une méthode itérative. Il résout à chaque étape dans chaque sous domaine une équation aux dérivées partielles dont les conditions aux bords sont calculées en fonction des données aux bords dans les domaines voisins à l'étape précédente. R. Glowinsky [8] et M.F. Wheeler [8] utilisent la décomposition de domaine pour définir une méthode de gradient conjugué associée à une discrétisation par éléments finis. J.H. Bramble [3], J.E. Pasciak [3] et A.H. Schatz [3] construisent de bons préconditionneurs pour le problème discrétisé. De manière générale, la décomposition de domaine est présentée dans le cas elliptique coercif, dont la formulation variationnelle permet d'obtenir des estimations qui assurent le bon comportement théorique et numérique de toutes ces méthodes.

### 3.2 Les bonnes conditions de transmissions pour le problème de Helmholtz

Nous allons étudier de manière systématique des conditions de transmissions qui aboutissent à des problèmes bien posés, lorsque l'on définit ensuite un processus itératif. Soit  $u \in H^1(\Omega)$ , solution de :

$$(3.1) \quad (-\Delta - \omega^2)u = f \text{ dans } \Omega,$$

$$(3.2) \quad \left(\frac{\partial}{\partial n} + i\omega\right)u = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux ouverts à frontière suffisamment régulière, ne se recouvrant pas, tels que :

$$(3.3) \quad \overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2},$$

$$(3.4) \quad \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2} = \Sigma,$$

$$(3.5) \quad \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega = \emptyset.$$

Cela correspond à une situation où  $\Omega_2$  est situé à "l'intérieur" de  $\Omega$ . Soit  $(u_1, u_2)$  un couple de  $H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ , il est clair que  $u|_{\Omega_1} = u_1$  et  $u|_{\Omega_2} = u_2$  équivaut à :

$$(3.6) \quad (-\Delta - \omega^2)u_1 = f|_{\Omega_1} \text{ dans } \Omega_1,$$

$$(3.7) \quad (-\Delta - \omega^2)u_2 = f|_{\Omega_2} \text{ dans } \Omega_2,$$

$$(3.8) \quad \left(\frac{\partial}{\partial n_1} + i\omega\right)u_1 = 0 \text{ sur } \Gamma$$

$$(3.9) \quad u_1|_{\Sigma} = u_2|_{\Sigma} \text{ par continuité de la trace ,}$$

$$(3.10) \quad \frac{\partial}{\partial n_1}u_1 + \frac{\partial}{\partial n_2}u_2 = 0 \text{ sur } \Sigma \text{ d'après la formulation variationnelle de (2.1)}$$

En effectuant des combinaisons linéaires de ces conditions aux bords, nous voyons que  $u_1$  est solution du problème suivant :

$$(3.11) \quad (-\Delta - \omega^2)u_1 = f|_{\Omega_1} \text{ dans } \Omega_1,$$

$$(3.12) \quad \left(\frac{\partial}{\partial n_1} + i\omega\right)u_1 = 0 \text{ sur } \Gamma,$$

$$(3.13) \quad \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial n_1} + \beta_1\right)u_1 = \left(-\alpha_1 \frac{\partial}{\partial n_2} + \beta_1\right)u_2 \text{ sur } \Sigma$$

et que pour sa part,  $u_2$  satisfait des équations semblables :

$$(3.14) \quad (-\Delta - \omega^2)u_2 = f|_{\Omega_2} \text{ dans } \Omega_2,$$

$$(3.15) \quad \left(\alpha_2 \frac{\partial}{\partial n_2} + \beta_2\right)u_2 = \left(-\alpha_2 \frac{\partial}{\partial n_1} + \beta_2\right)u_1 \text{ sur } \Sigma.$$

Examinons divers choix de  $\alpha_2$  et  $\beta_2$ .

a)  $\alpha_2 = 0 \quad \beta_2 \neq 0$

C'est un choix naturel dans le cas elliptique, qui ne convient absolument pas ici. En effet, il peut exister un vecteur propre du Laplacien qui possède les propriétés déterminées par les conditions aux bords.

b) Donc  $\alpha_2 \neq 0$ . Divisons par  $\alpha_2$ , ce qui revient à envisager  $\alpha_2 = 1$  et  $\beta_2 \in \mathbb{C}$ . La forme bilinéaire sur le bord issue de la formulation variationnelle de (3.14) et (3.15) est :

$$(3.16) \quad \int_{\Sigma} \beta_2 u \cdot \bar{v}.$$

Nous savons que pour appliquer le théorème (2.1), il faut que cette forme soit coercive, au moins sur une partie de  $\Sigma$ . Nous en sommes certains dès que :

$$(3.17) \quad \operatorname{Im}(\beta_2) > 0.$$

Pour des raisons qui s'éclaireront par la suite (théorème 5.1), et par homogénéité avec le problème dans  $\Omega$ , nous prenons :

$$(3.18) \quad \beta_2 = i\omega.$$

c) Dans le cas où les coefficients  $\mu$  et  $\rho$  sont variables, les conditions de transmission s'écrivent :

$$(3.19) \quad u_{1|\Sigma} = u_{2|\Sigma},$$

$$(3.20) \quad \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

$\mu_1$  et  $\mu_2$  sont les valeurs de  $\mu$  de part et d'autre de  $\Sigma$ . Rappelons que nous utilisons une classe de fonctions  $\mu$  qui acceptent des discontinuités de surface. Nous aboutissons à :

$$(3.21) \quad \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \beta_1 u_1 = -\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} + \beta_1 u_2, \text{ et}$$

$$(3.22) \quad \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n_2} + \beta_2 u_2 = -\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \beta_2 u_1.$$

Nous prenons :

$$(3.23) \quad \beta_j = i\omega\beta'_j, \quad j = 1, 2$$

où  $\beta'_j$  est une fonction réelle strictement positive de  $\sigma_1 = \sqrt{\rho_1\mu_1}$  et  $\sigma_2 = \sqrt{\rho_2\mu_2}$ , telle que :

$$(3.24) \quad \beta'_j(\sigma, \sigma) = \sigma,$$

ce qui rend nos conditions de bords homogènes pour les dimensions, et homogènes avec le choix de  $\beta$  fait dans le cas de coefficients  $\mu$  et  $\rho$  égaux à 1. Nous prenons de plus :

$$(3.25) \quad \beta'_1(\sigma_1, \sigma_2) = \beta'_2(\sigma_2, \sigma_1) = \beta'(\sigma_1, \sigma_2),$$

pour les besoins de la démonstration faite théorème (4.2). Par exemple :

$$(3.26) \quad \beta'(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \text{ convient.}$$

### 3.3 Définition d'une méthode de décomposition de domaine itérative

Tout d'abord, des notations qui sont décrites dans la figure (3.1). Soient  $\Omega_k$  des ouverts disjoints, tels que pour tout  $k \in K$  fini :

$$(3.27) \quad \Omega = \overline{(\cup \Omega_k)}$$

$$(3.28) \quad \Gamma = \partial\Omega$$

$$(3.29) \quad \Sigma_{kj} = \Sigma_{jk} = \overline{\Omega_k} \cap \overline{\Omega_j}, \quad \Omega_k \text{ et } \Omega_j \text{ contigus},$$

$$(3.30) \quad \Gamma_k = \overline{\Omega_k} \cap \Gamma, \text{ alors}$$

$$(3.31) \quad \partial\Omega_k = \left(\bigcup_j \Sigma_{kj}\right) \cup \Gamma_k.$$

$\nu_k$  est la normale sortante de  $\Omega_k$ ,

$n$  est la normale sortante de  $\Omega$ , et coïncide avec  $\nu_k$  sur  $\Gamma_k$ ,

$u_k^n$  est la valeur de la solution dans  $\Omega_k$  à l'itération  $n$ .

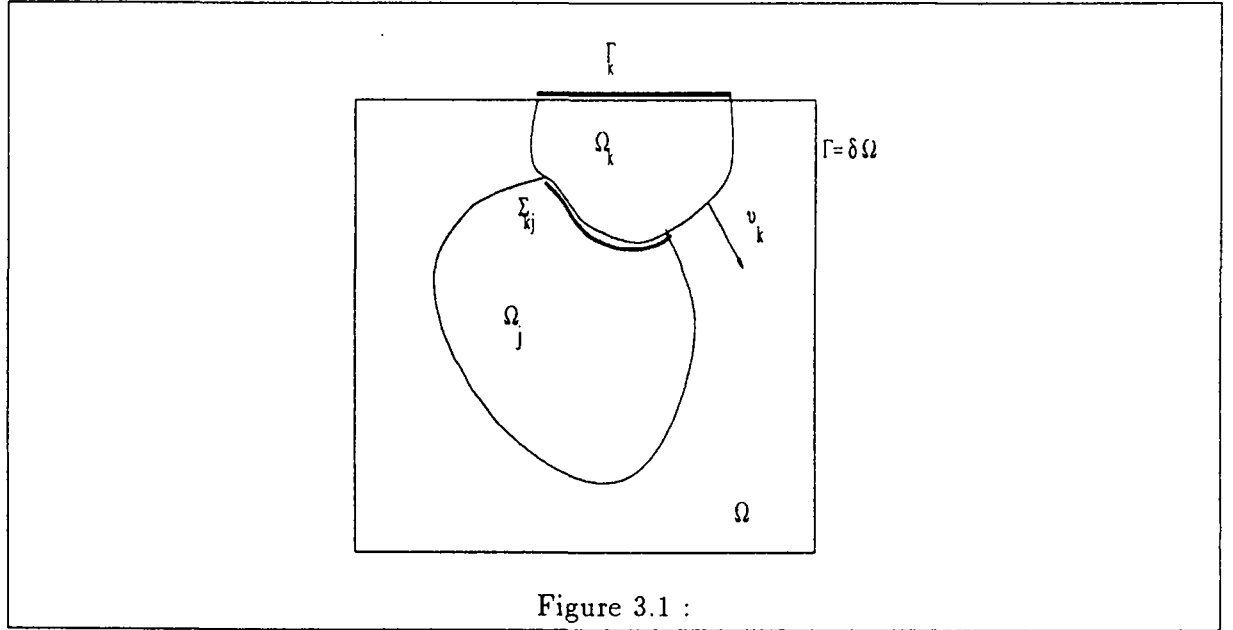


Figure 3.1 :

Notons (3.32) le processus itératif :

$$(3.32) \quad \left[ \begin{array}{ll} u_k^0 \in H^1(\Omega_k) & \\ \forall k \in K & \begin{array}{ll} (-\Delta - \omega^2)u_k^{n+1} = f & \text{dans } \Omega_k, \\ (\frac{\partial}{\partial \nu_k} + i\omega)u_k^{n+1} = (-\frac{\partial}{\partial \nu_j} + i\omega)u_j^n & \text{sur } \Sigma_{kj}, \forall j, \\ (\frac{\partial}{\partial \nu_k} + i\omega)u_k^{n+1} = 0 & \text{sur } \Gamma_k. \end{array} \end{array} \right.$$

Remarques

a) à chaque étape, nous allons résoudre dans chaque sous-domaine un problème du même type que celui que nous cherchons à résoudre dans le grand domaine.

b) nous noterons de manière évidente :

$$v^n \in \prod_{k \in K} H^1(\Omega_k) \iff$$

$$\forall k \in K, v^n|_{\Omega_k} = v_k^n.$$

c) dans le cas de coefficients variables, nous nous servons des conditions définies par les équations (3.24), (3.25) et (3.26).

# Chapitre 4

## Etude de la convergence dans le cas général modèle

### 4.1 Un résultat d'isométrie

Soit  $\Theta$  un ouvert borné, de frontière  $\partial\Theta$ . D'après le théorème (2.1), nous savons que :

$$(4.1) \quad \forall h^+ \in H^{-1/2}(\partial\Theta), \exists ! e \in H^1(\Theta),$$

$$(4.2) \quad (-\Delta - \omega^2)e = 0 \text{ dans } \Theta,$$

$$(4.3) \quad \left(\frac{\partial}{\partial n} + i\omega\right)e = h^+ \text{ sur } \partial\Theta.$$

De même :

$$(4.4) \quad \forall h^- \in H^{-1/2}(\partial\Theta), \exists ! e \in H^1(\Theta),$$

$$(4.5) \quad (-\Delta - \omega^2)e = 0 \text{ dans } \Theta,$$

$$(4.6) \quad \left(\frac{\partial}{\partial n} - i\omega\right)e = h^- \text{ sur } \partial\Theta.$$

La relation :

$$(4.7) \quad h^+ = h^- + 2i\omega e$$

permet de définir un isomorphisme  $\Pi$ ,

$$(4.8) \quad \Pi : H^{-1/2}(\partial\Theta) \longrightarrow H^{-1/2}(\partial\Theta)$$

$$(4.9) \quad h^+ \longmapsto h^- = h^+ - 2i\omega e.$$

La propriété importante de  $\Pi$  est décrite dans le lemme.

**Lemme 4.1** *Sous l'hypothèse  $h^+ \in L^2(\partial\Theta)$  et  $h^- \in L^2(\partial\Theta)$ , ce qui revient à dire  $\frac{\partial}{\partial n}e \in L^2(\partial\Theta)$ , nous avons :*

$$(4.10) \quad \int_{\partial\Theta} |h^+|^2 = \int_{\partial\Theta} |h^-|^2.$$

Preuve

$$(4.11) \quad \int_{\partial\Theta} |h^+|^2 = \int_{\partial\Theta} \left( \frac{\partial}{\partial n} e + i\omega e \right) \left( \frac{\partial}{\partial n} \bar{e} - i\omega \bar{e} \right),$$

$$(4.12) \quad \int_{\partial\Theta} |h^+|^2 = \int_{\partial\Theta} \left| \frac{\partial}{\partial n} e \right|^2 + \omega^2 |e|^2 - 2\operatorname{Re}(i\omega \int_{\partial\Theta} \frac{\partial}{\partial n} e \cdot \bar{e}).$$

Or

$$(4.13) \quad \int_{\partial\Theta} \frac{\partial}{\partial n} e \cdot \bar{e} = \int_{\partial} \nabla e \cdot \nabla \bar{e} - \omega^2 e \bar{e} \in R, \text{ donc}$$

$$(4.14) \quad \operatorname{Re}(i\omega \int_{\partial\Theta} \frac{\partial}{\partial n} e \cdot \bar{e}) = 0, \text{ d'où}$$

$$(4.15) \quad \int_{\partial\Theta} |h_+|^2 = \int_{\partial\Theta} \left| \frac{\partial}{\partial n} e \right|^2 + \omega^2 |e|^2. \text{ De même,}$$

$$(4.16) \quad \int_{\partial\Theta} |h_-|^2 = \int_{\partial\Theta} \left| \frac{\partial}{\partial n} e \right|^2 + \omega^2 |e|^2, \text{ d'où le résultat}$$

$$\int_{\partial\Theta} |h_-|^2 = \int_{\partial\Theta} |h_+|^2.$$

fin de la preuve

En résumé,  $\Pi|_{L^2}$  est une isométrie pour la norme  $L^2(\partial\Theta)$ .

Remarques :

a) Le fait que  $\Theta$  soit borné est essentiel.

b) Le résultat est intuitif lorsque  $\omega^2$  n'est pas une valeur propre du problème de Dirichlet intérieur pour  $-\Delta$ . En effet, l'opérateur  $T(\omega) : u|_{\Gamma} \mapsto \frac{\partial}{\partial n} u|_{\Gamma}$  est alors parfaitement défini. Il est auto-adjoint à résolvante compacte dans  $L^2(\Gamma)$ , et donc diagonalisable sur une base orthonormée de  $L^2(\Gamma)$ , que nous appelons  $W_n$ .

$$T(W_n) = \lambda_n(\omega) W_n \quad \lambda_n(\omega) \in R.$$

L'opérateur  $h^+ \rightarrow h^-$  considéré dans le lemme consiste alors à passer de la fonction :

$$h^+ = \sum_n (\lambda_n(\omega) + i\omega) u_n W_n,$$

à la fonction :

$$h^- = \sum_n (\lambda_n(\omega) - i\omega) u_n W_n.$$

Le résultat d'isométrie est une conséquence du fait que comme  $\lambda_n(\omega)$  est réel, les nombres  $\lambda_n(\omega) - i\omega$  et  $\lambda_n(\omega) + i\omega$  sont conjugués.

## 4.2 Démonstration de la convergence de la méthode de décomposition de domaine définie pour le problème modèle

Nous avons tout d'abord le lemme suivant :

**Lemme 4.2** *La seule solution stationnaire du processus itératif (3.32) est u solution de (2.1).*

**Preuve**

Soit  $v$  une solution stationnaire de (3.32). Sur  $\Sigma_{kj}$ , nous avons :

$$(4.17) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu_k} + i\omega\right)v_k = \left(-\frac{\partial}{\partial \nu_j} + i\omega\right)v_j, \text{ et}$$

$$(4.18) \quad \left(-\frac{\partial}{\partial \nu_k} + i\omega\right)v_k = \left(\frac{\partial}{\partial \nu_j} + i\omega\right)v_j, \text{ c'est-à-dire}$$

$$(4.19) \quad v_k = v_j$$

$$(4.20) \quad \frac{\partial}{\partial \nu_k}v_k + \frac{\partial}{\partial \nu_j}v_j = 0.$$

La fonction  $v$  est continue sur les  $\Sigma_{kj}$ , donc  $v$  est dans  $H^1(\Omega)$ . Les conditions de raccord sur les dérivées normales montre que  $v$  satisfait :

$$(4.21) \quad (-\Delta - \omega^2)v = f \text{ dans } \Omega,$$

$$(4.22) \quad \left(\frac{\partial}{\partial n} + i\omega\right)v = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

D'après le résultat d'unicité du théorème (2.1),

$$(4.23) \quad v = u.$$

*fin de la preuve*

Pour analyser le comportement de  $u^n$ , nous pouvons lui soustraire  $u$  et introduire l'erreur.

$$(4.24) \quad e^n = u - u^n.$$

D'après la linéarité des équations,  $e^n$  est solution des processus itératif suivant :

$$(4.25) \quad e_k^0 \in H^1(\Omega_k) \quad \forall k \in K$$

$$(4.26) \quad (-\Delta - \omega^2)e_k^{n+1} = 0 \text{ dans } \Omega_k,$$

$$(4.27) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu_k} + i\omega\right)e_k^{n+1} = \left(-\frac{\partial}{\partial \nu_j} + i\omega\right)e_j^n \text{ sur } \Sigma_{kj}, \forall j,$$

$$(4.28) \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu_k} + i\omega\right)e_k^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_k.$$

Nous allons montrer dans le lemme (4.3) une identité satisfaite par la suite  $e^n$  :



**Lemme 4.3** *Sous l'hypothèse :*

$$(4.29) \quad \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^0 \in L^2(\partial\Omega_k), \forall k, \text{ nous avons}$$

$$(4.30) \quad \forall n \geq 1, \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^n \in L^2(\partial\Omega_k), \forall k, \text{ et}$$

$$(4.31) \quad \begin{aligned} & \sum_{k \in K} \left[ \int_{\partial\Omega_k} \left| \frac{\partial e_k^{n+1}}{\partial \nu_k} \right|^2 + \omega^2 |e_k^{n+1}|^2 \right] + 4\omega^2 \sum_{l=0}^n \int_{\Gamma} |e_l^n|^2 \\ &= \sum_{k \in K} \left[ \int_{\partial\Omega_k} \left| \frac{\partial e_k^0}{\partial \nu_k} \right|^2 + \omega^2 |e_k^0|^2 \right]. \end{aligned}$$

**Preuve**

Montrons d'abord la propriété (4.30),

$$(4.32) \quad \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^{n+1} = -i\omega e_k^{n+1} + i\omega e_j^n - \frac{\partial}{\partial \nu_j} e_j^n, \text{ sur } \Sigma_{kj}$$

$$(4.33) \quad \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^{n+1} = -i\omega e_k^{n+1} \text{ sur } \Gamma_k. \text{ Or}$$

$$(4.34) \quad \forall k, \forall n, e_k^n \in H^{1/2}(\partial\Omega_k) \text{ donc } \in L^2(\partial\Omega_k), \text{ donc}$$

$$(4.35) \quad \forall k, \forall n, \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^n \in L^2(\partial\Omega_k) \text{ implique}$$

$$(4.36) \quad \forall k, \forall n, \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^{n+1} \in L^2(\partial\Omega_k)$$

Démontrons maintenant l'égalité (4.31). Séparons chaque frontière  $\partial\Omega_k$  en  $\Sigma_{kj}$  et  $\Gamma_k$ , nous avons :

$$(4.37) \quad \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \left| \left( \frac{\partial}{\partial \nu_k} + i\omega \right) e_k^{n+1} \right|^2$$

$$(4.38) \quad = \sum_{j,k} \int_{\Sigma_{kj}} \left| \left( \frac{\partial}{\partial \nu_k} + i\omega \right) e_k^{n+1} \right|^2 + \sum_k \int_{\Gamma_k} \left| \left( \frac{\partial}{\partial \nu_k} + i\omega \right) e_k^{n+1} \right|^2$$

$$(4.39) \quad = \sum_{j,k} \int_{\Sigma_{jk}} \left| \left( \frac{\partial}{\partial \nu_j} - i\omega \right) e_j^n \right|^2.$$

Nous avons tenu compte des conditions de transmission sur  $\Sigma_{kj}$  et de la condition aux limites sur  $\Gamma_k$  pour passer de (4.38) à (4.39). Puis :

$$(4.40) \quad \begin{aligned} & \sum_{j,k} \int_{\Sigma_{jk}} \left| \left( \frac{\partial}{\partial \nu_j} - i\omega \right) e_j^n \right|^2 \\ &= \sum_{j,k} \int_{\Sigma_{jk}} \left| \left( \frac{\partial}{\partial \nu_j} - i\omega \right) e_j^n \right|^2 + \sum_j \int_{\Gamma_j} \left| \left( \frac{\partial}{\partial \nu_j} - i\omega \right) e_j^n \right|^2 - \sum_j \int_{\Gamma_j} \left| \left( \frac{\partial}{\partial \nu_j} - i\omega \right) e_j^n \right|^2 \end{aligned}$$

$$(4.41) \quad = \sum_j \int_{\partial\Omega_j} \left| \left( \frac{\partial}{\partial \nu_j} + i\omega \right) e_j^n \right|^2 - 4\omega^2 \sum_j \int_{\Gamma_j} |e_j^n|^2.$$

Sur  $\Gamma$ , nous avons utilisé le fait que :

$$(4.42) \quad \left( \frac{\partial}{\partial \nu} - i\omega \right) e_j^n = 2i\omega e_j^n$$

pour passer de (4.40) à (4.41). Nous pouvons réécrire :

$$(4.43) \quad \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \left| \left( \frac{\partial}{\partial \nu_k} + \omega \right) e_k^{n+1} \right|^2 = \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \left| \left( \frac{\partial}{\partial \nu_k} + i\omega \right) e_k^n \right|^2 - 4\omega^2 \int_{\Gamma} |e^n|^2.$$

Effectuons une sommation sur l'indice d'itération, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \left( \left| \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^{n+1} \right|^2 + \omega^2 |e_k^{n+1}|^2 \right) + 4\omega^2 \sum_{l=0}^n \int_{\Gamma} |e^l|^2 \\ &= \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \left( \left| \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^0 \right|^2 + \omega^2 |e_k^0|^2 \right). \end{aligned}$$

*fin de la preuve*

Pour exploiter cette identité, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.4** *Soit  $\Theta$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière assez régulière. Notons :*

$$(4.44) \quad V = \{e \in H^1(\Theta), (-\Delta - \omega^2)e = 0 \text{ dans } \Theta\}.$$

*Nous avons alors :*

$$(4.45) \quad \exists C > 0, \forall e \in H^1(\Theta), \|e\|_{H^1(\Theta)} \leq C \left\| \left( \frac{\partial}{\partial n} + i\omega \right) e \right\|_{H^{-1/2}(\Theta)}.$$

**Preuve**

La formulation variationnelle montre que  $V$  est fermé dans  $H^1(\Theta)$  donc  $V$  est un espace de Hilbert pour la norme  $H^1$ . Soit  $\psi$  :

$$(4.46) \quad \begin{aligned} \psi : V &\longrightarrow H^{-1/2}(\partial\Theta) \\ e &\longmapsto h^+ = \left( \frac{\partial}{\partial n} + i\omega \right) e \text{ sur } \partial\Theta \end{aligned}$$

$\psi$  se définit variationnellement par

$$(4.47) \quad {}_{H^{-1/2}(\partial\Theta)} \langle h^+, \varphi \rangle_{H^{1/2}(\partial\Theta)} = \int_{\Theta} (\nabla e \nabla \varphi - \omega^2 e \varphi) + i\omega \int_{\partial\Theta} e \varphi,$$

$$(4.48) \quad h^+ = \psi(e), \forall e \in H^1(\Theta).$$

$\psi$  est donc continue de  $V$  dans  $H^{-1/2}(\partial\Theta)$ . Réciproquement, le théorème d'unicité (2.1) assure que:

$$(4.49) \quad \forall h^+ \in H^{-1/2}(\partial\Theta), \exists! e \in V, h^+ = \psi(e).$$

$\psi$  est donc un isomorphisme bijectif, continu, d'un espace de Hilbert dans un autre. Par le théorème de l'application ouverte, [4],  $\psi$  est bicontinu, c'est-à-dire :

$$(4.50) \quad \exists C' > 0, \forall e \in V, \|e\|_{H^1(\Theta)} \leq C' \left\| \left( \frac{\partial}{\partial n} + i\omega \right) e \right\|_{H^{-1/2}(\partial\Theta)}.$$

*fin de la preuve*

**Remarque** Il s'agit d'une estimation a priori sur la solution du problème de Helmholtz avec condition de radiation à distance finie. Dans le cas des équations elliptiques, il est beaucoup plus simple d'obtenir directement une estimation des normes des fonctions l'intérieur des domaines. La difficulté présentée dans le lemme (4.4) est caractéristique du problème de Helmholtz. L'égalité montré au lemme (4.3) prouve que :

$$(4.51) \quad \int_{\Gamma} |e^n|^2 \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty), \text{ et que}$$

$$(4.52) \quad \exists C > 0, \forall k, \forall n, \left\| \left( \frac{\partial}{\partial \nu_k} + i\omega \right) e_k^n \right\|_{L^2(\partial\Omega_k)} \leq C.$$

Il y a inclusion continue de  $H^{-1/2}(\partial\Omega_k)$  dans  $L^2(\partial\Omega_k)$ , donc (4.52) entraîne :

$$(4.53) \quad \exists C > 0, \forall k, \forall n, \left\| \left( \frac{\partial}{\partial \nu_k} + i\omega \right) e_k^n \right\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega_k)} \leq C.$$

Grâce au lemme (4.4), nous avons enfin :

$$(4.54) \quad \exists C > 0, \forall k, \forall n, \|e_k^n\|_{H^1(\Omega_k)} \leq C.$$

Pour la suite de la démonstration, regroupons les sous-domaines  $\Omega_k$  en groupe de sous-domaines  $G_i$  tels que :

$$(4.55) \quad G_1 = \cup \{ \Omega_j, \partial\Omega_j \cap \Gamma \neq \emptyset \}, G_{i+1} = \cup \{ \Omega_j, \partial\Omega_j \cap \overline{G_i} \neq \emptyset, \Omega_j \cap G_i = \emptyset \}$$

C'est la même définition qu'au théorème (2.1) La figure (4.1) montre un exemple d'un tel regroupement.

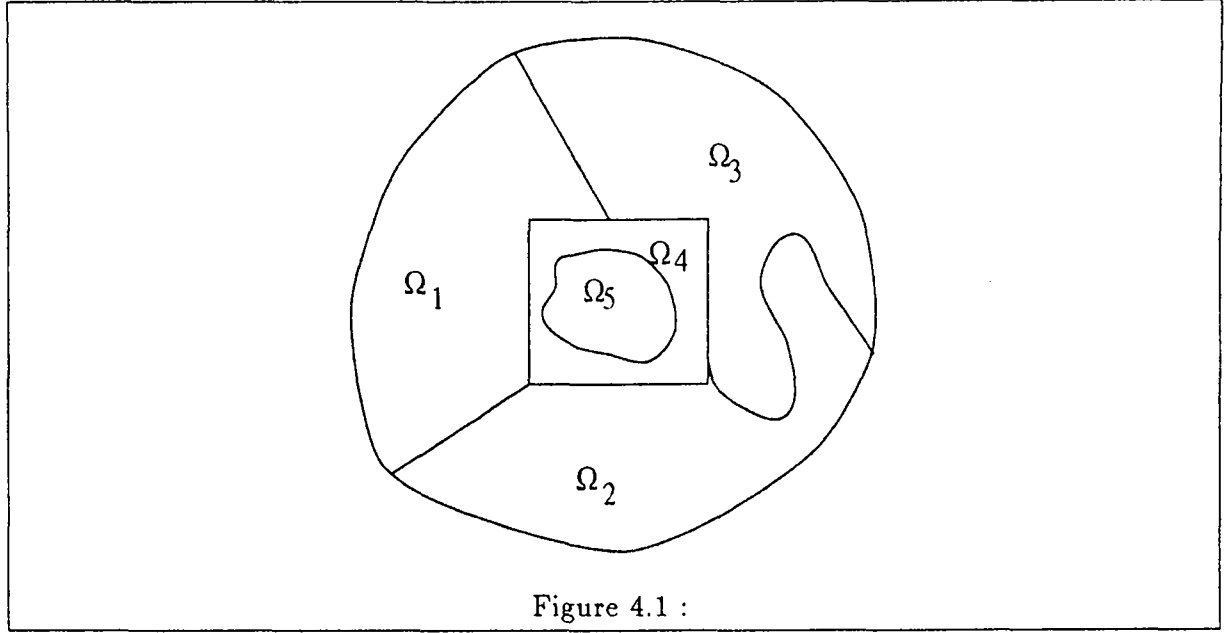
$$G_1 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3,$$

$$G_2 = \Omega_4,$$

$$G_3 = \Omega_5.$$

Nous avons le théorème de convergence suivant :

**Théorème 4.1** *Sous l'hypothèse  $\frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^0 \in L^2(\partial\Omega_k), \forall k$ , nous avons  $\forall k, u_k^n$  tend fortement vers  $u$  (solution de 2.1) dans  $H^1(\Omega_k)$  quand  $n$  croit à l'infini.*



### Preuve

Elle se fait en plusieurs étapes :

a) Montrons d'abord que

$$(4.56) \quad \forall \Omega_k \subset G_1, e_k^n \text{ tend faiblement vers } 0 \text{ dans } H^1(\Omega_k).$$

La suite  $e_k^n$  est bornée dans  $H^1(\Omega_k)$  (égalité 4.54), donc nous en extrayons une sous-suite, toujours notée  $e_k^n$  telle que :

$$(4.57) \quad \exists e_k \in H^1(\Omega_k), e_k^n - e_k \text{ faiblement dans } H^1(\Omega_k).$$

La sous suite  $e_k^n$  tend faiblement vers  $e_k$  dans  $H^1(\Omega_k)$ , donc par compacité  $e_k^n$  tend fortement vers  $e_k$  dans  $H^{1/2-\varepsilon}(\partial\Omega_k)$  ainsi que dans  $L^2(\partial\Omega_k)$ . De plus, d'après le lemme (4.3) nous savons que  $\frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^n$  est borné dans  $L^2(\partial\Omega_k)$ . C'est donc que il existe  $g_k \in L^2(\partial\Omega_k)$ ,  $\frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^n$  tend faiblement dans  $L^2(\partial\Omega_k)$  vers  $g_k$ . En utilisant la formulation variationnelle, nous montrons que :

$$(4.58) \quad \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k \in L^2(\partial\Omega_k), \text{ et } \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^n - \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k \text{ dans } L^2(\partial\Omega_k) \text{ faible.}$$

Tout ceci montre que :

$$(4.59) \quad \left( \frac{\partial}{\partial n} + i\omega \right) e_k = 0 \text{ sur } \Gamma_k.$$

Or nous savons que :

$$\| e_k^n \|_{L^2(\Gamma_k)} \longrightarrow 0, \text{ donc}$$

$$(4.60) \quad e_k = 0 \text{ sur } \Gamma_k, \text{ et}$$

$$(4.61) \quad \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k = 0 \text{ sur } \Gamma_k.$$

Passons à la limite faible dans la formulation variationnelle, nous avons également :

$$(4.62) \quad (-\Delta - \omega^2)e_k = 0 \text{ dans } \Omega_k.$$

Les hypothèses du corollaire (2.1) sont satisfaites dans les expressions (4.60), (4.61) et (4.62)). Donc :

$$(4.63) \quad e_k = 0 \text{ dans } \Omega_k.$$

Cette limite faible  $e_k$  est donc unique. En conclusion toute la suite  $e_k^n$  tend faiblement vers 0 dans  $H^1(\Omega_k)$ . Montrons maintenant que  $\forall k \in G_1$ ,  $e_k^n$  tend fortement vers 0 dans  $H^1(\Omega_k)$ . Pour cela, rappelons-nous que  $e_k^n$  est solution d'une équation différentielle et utilisons la formulation variationnelle:

$$(4.64) \quad \int_{\Omega_k} \nabla e_k^n \cdot \nabla \overline{e_k^n} = \int_{\partial \Omega_k} \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^n \cdot \overline{e_k^n} + \omega^2 \int_{\Omega_k} e_k^n \overline{e_k^n},$$

Or

$$e_k^n \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega_k) \text{ par compacité, ,}$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^n \text{ est borné dans } L^2(\partial \Omega_k),$$

$$e_k^n \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\partial \Omega_k). \text{ C'est donc que}$$

$$(4.65) \quad e_k^n \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } H^1(\Omega_k)$$

b) Supposons à présent que :

$$(4.66) \quad \forall \Omega_j < G_r, e_j^n \text{ tend fortement vers 0 dans } H^1(\Omega_j).$$

Nous allons montrer que

$$(4.67) \quad \forall \Omega_k < G_{r+1}, e_k^n \text{ tend fortement vers 0 dans } H^1(\Omega_k).$$

Grâce à l'égalité (4.54), nous extrayons une sous-suite de  $e_k^n$ , toujours notée  $e_k^n$ , telle que :

$$(4.68) \quad \exists e_k \in H^1(\Omega_k), e_k^n \rightharpoonup e_k \text{ dans } H^1(\Omega_k) \text{ faible}$$

Or

$$(4.69) \quad \forall \Omega_k \in G_{r+1}, \exists j, \Omega_j \text{ et } \Omega_k \text{ sont contigus, } \Omega_j \subset G_1.$$

Ecrivons les conditions de transmissions à l'étape  $n$  et à l'étape  $n+1$  sur la frontière  $\Sigma_{kj}$ .

$$(4.70) \quad \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^{n+1} + i\omega e_k^{n+1} = -\frac{\partial}{\partial \nu_j} e_j^n + i\omega e_j^n$$

$$(4.71) \quad -\frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^{n+1} + i\omega e_k^{n+1} = \frac{\partial}{\partial \nu_j} e_j^{n+2} + i\omega e_j^{n+2}.$$

$\Omega_j \subset G_1$ , donc  $\frac{\partial}{\partial \nu_j} e_j^n$  tend faiblement vers 0 dans  $L^2(\Sigma_{kj})$  et  $e_j^n$  tend fortement vers 0 dans  $L^2(\Sigma_{kj})$ . Donc :

$$(4.72) \quad e_k^{n+1} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Sigma_{kj}) \text{ et}$$

$$(4.73) \quad \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^{n+1} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Sigma_{kj}).$$

De plus, les arguments exposés au a) sont encore valides donc :

$$(4.74) \quad \frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k = 0 \text{ sur } \Sigma_{kj}.$$

De même,

$$(4.75) \quad e_k = 0 \text{ sur } \Sigma_{kj}.$$

Nous avons également :

$$(4.76) \quad (-\Delta - \omega^2)e_k = 0 \text{ dans } \Omega_k,$$

donc  $e_k = 0$  dans  $\Omega_k$ . C'est donc toute la suite  $e_k^n$  qui converge faiblement vers 0 dans  $H^1(\Omega_k)$ . Pour montrer la convergence forte, il suffit de reprendre la partie a).

*fin de la preuve*

### 4.3 Extension aux coefficients $\mu$ et $\rho$ variables

Soit  $u$  la solution de :

$$(4.77) \quad -\nabla(\mu \nabla u) - \omega^2 \rho u = f \text{ dans } \Omega$$

$$(4.78) \quad \frac{\partial u}{\partial n} + i\omega \sigma u = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Nous allons avec des notations claires définir un processus itératif :

$$(4.79) \quad \begin{aligned} & u_k^0 \in H^1(\Omega_k), \forall k \\ & \forall k \in K \\ & -\nabla(\mu \nabla u_k^{n+1}) - \omega^2 \rho u_k^{n+1} = f|_{\Omega_k} \text{ dans } \Omega_k \\ & \left[ \mu_k \frac{\partial}{\partial \nu_k} + \omega \beta'(\sigma_k, \sigma_j) \right] u_k^{n+1} = \left[ -\mu_j \frac{\partial}{\partial \nu_j} + i\omega \beta'(\sigma_j, \sigma_k) \right] u_j^n, \quad \text{sur } \Sigma_j k \\ & \mu_k \frac{\partial}{\partial \nu_k} + i\sigma_k u_k^{n+1} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_k \end{aligned}$$

Rappelons (3.24), (3.25) et (3.26) que  $\beta'$  est une fonction de deux variables strictement positive telle que :

$$\begin{aligned} \beta'(a, b) &= \beta'(b, a) > 0 \\ \beta'(a, a) &= a. \end{aligned}$$

$\mu_k$  est la valeur de  $\mu$  prise sur  $\partial\Omega_k$ , et  $\mu_j$  la valeur de  $\mu_j$  prise sur  $\Omega_j$ . Et  $\sigma_k = \sqrt{\mu_k \rho_k}$ . Nous avons le lemme :

**Lemme 4.5** *La fonction  $u$  est la seule solution stationnaire du processus itératif (4.79).*

**Preuve**

elle est la même que celle du lemme (4.1). *fin de la preuve*

Nous avons un résultat d'isométrie pour une norme à poids de  $L^2(\partial\mathcal{O})$  sous la forme :

**Lemme 4.6** *Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $e$  solution de :*

$$(4.80) \quad -\nabla(\mu\nabla e) - \omega^2 \rho e = 0 \text{ dans } \mathcal{O}. \text{ Soient}$$

$$(4.81) \quad h_+ = \mu \frac{\partial e}{\partial n} + i\omega\beta' e, \text{ et}$$

$$(4.82) \quad h_- = \mu \frac{\partial e}{\partial n} - i\omega\beta' e.$$

$\beta'$  est strictement positive. Alors sous l'hypothèse  $\frac{\partial e}{\partial n} \in L^2(\partial\mathcal{O})$ , nous avons :

$$(4.83) \quad \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{1}{\beta'} |h_+|^2 = \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{1}{\beta'} |h_-|^2.$$

**Preuve**

Elle est très similaire à la démonstration du lemme (4.1). *fin de la preuve*

Notons  $e_k^n = u_k^n - u$ . Nous avons le

**Lemme 4.7** *Sous l'hypothèse  $\frac{\partial}{\partial \nu_k} e_k^0 \in L^2(\partial\Omega_k), \forall k$ , nous avons :*

$$\begin{aligned} & \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \left[ \frac{1}{\beta'} \left| \frac{\partial e_k^{n+1}}{\partial \nu_k} \right|^2 + \beta' \omega^2 |e_k^{n+1}|^2 \right] + 4\sigma^2 \sum_{l=0}^n |e^n|^2 \\ &= \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \left[ \frac{1}{\beta'} \left| \frac{\partial e_k^0}{\partial \nu_k} \right|^2 + \beta' \omega^2 |e_k^0|^2 \right]. \end{aligned}$$

**Preuve**

Voir lemme (4.3). Le point important est que nous avons choisi des fonction  $\beta'$  qui prennent la même valeur de chaque côté d'une interface. Les fonctions  $\beta'$  s'interprètent comme des poids. En toute rigueur, nous pouvons prendre des fonctions  $\beta'$  différentes sur chaque interface. *fin de la preuve*

Finalement, nous avons le :

**Théorème 4.2**  $\forall k, \forall n$

$e_k^n \rightarrow 0$  dans  $H^1(\Omega_k)$  fortement.

**Preuve**

voir théorème (4.1). *fin de la preuve*

## 4.4 Comparaison avec un cas coercif

Nous aurions pu définir la même méthode itérative pour des problèmes de type Laplace du genre:

$$(4.84) \quad \begin{cases} -\Delta u + \omega^2 u = f & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \omega u = 0 & \text{sur } \Gamma. \quad \omega > 0 \end{cases}$$

L'égalité du lemme (4.1) traduirait alors une contraction stricte et non plus une isométrie. Cela aboutirait à une égalité pour le processus itératif :

$$(4.85) \quad \begin{aligned} & \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \left[ \left| \frac{\partial}{\partial \nu_k} e^{n+1} \right|^2 + \omega^2 \left| e^{n+1} \right|^2 \right] + \int_{\Omega_k} \left| \nabla e^{n+1} \right|^2 + \omega^2 \left| e^{n+1} \right|^2 \\ & + 2 \sum_{l=1}^n \int_{\Omega_k} \left| \nabla e^l \right|^2 + \omega^2 \left| e^l \right|^2 + \sum_{l=0}^n 4\omega^2 \left| e^l \right|^2 \\ & = \sum_k \int_{\partial\Omega_k} \left| \frac{\partial}{\partial \nu_k} e^0 - \omega e^0 \right|^2 \end{aligned}$$

Cette égalité (4.85) est plus forte que l'égalité (4.31). Elle permet de conclure tant de suite à la convergence du processus itératif vers la solution de (4.84).



# Chapitre 5

## Etude du taux de convergence

### 5.1 Cas monodimensionnel

Pour le problème modèle (2.1) monodimensionnel, reprenons les notations de la section (3.3) et examinons l'erreur :

$$\begin{aligned}\Omega &= ]0, +L[, \quad L > 0, \\ \Omega_k &= ]x_k, x_{k+1}[ , x_{k+1} > x_k, \quad 0 \leq k \leq K_0, \\ x_0 &= 0 \text{ et } x_{K_0+1} = L.\end{aligned}$$

L'erreur vérifie le processus (3.32) que nous réécrivons sous la forme

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} e_k^0 \in H^1(\Omega_k), \forall \Omega_k, & \\ \left( -\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 \right) e_k^{n+1} = 0 & \text{dans } \Omega_k, \\ \left( \frac{d}{dx} + i\omega \right) e_k^{n+1}(x_{k+1}) = \left( \frac{d}{dx} + i\omega \right) e_{k+1}^n(x_{k+1}) & k < 0, \\ & = 0 \quad k = K_0, \\ \left( -\frac{d}{dx} + i\omega \right) e_k^{n+1}(x_k) = \left( -\frac{d}{dx} + i\omega \right) e_{k-1}^n(x_k) & k > 0, \\ & = 0 \quad k = 0. \end{array} \right.$$

Nous avons alors le

**Théorème 5.1** *Soit  $n_0 = K_0 + 1$  le nombre de sous-domaine. Alors :*

$$\forall k, e_k^{n_0} \equiv 0 \text{ dans } \Omega_k$$

**Preuve**

Dans chaque  $\Omega_k$ , nous remarquons que :

$$(5.2) \quad e_k^n = a_k^n e^{i\omega x} + b_k^n e^{-i\omega x},$$

$$(5.3) \quad (a_k^n, b_k^n) \in C^2.$$

Ecrivons le processus itératif satisfait par les  $a_k^n$  et  $b_k^n$  :

$$(5.4) \quad \left[ \begin{array}{l} \bullet \ a_k^0, b_k^0 \text{ sont données par les conditions initiales} \\ \bullet \ \forall k, \forall n, \ a_{K_0}^{n+1} = 0 \text{ et } b_0^{n+1} = 0, \\ \quad a_k^{n+1} = a_{k+1}^n \text{ pour } 0 \leq k \leq K_0 - 1, \\ \quad b_k^{n+1} = b_{k-1}^n \text{ pour } 1 \leq k \leq K_0 \end{array} \right.$$

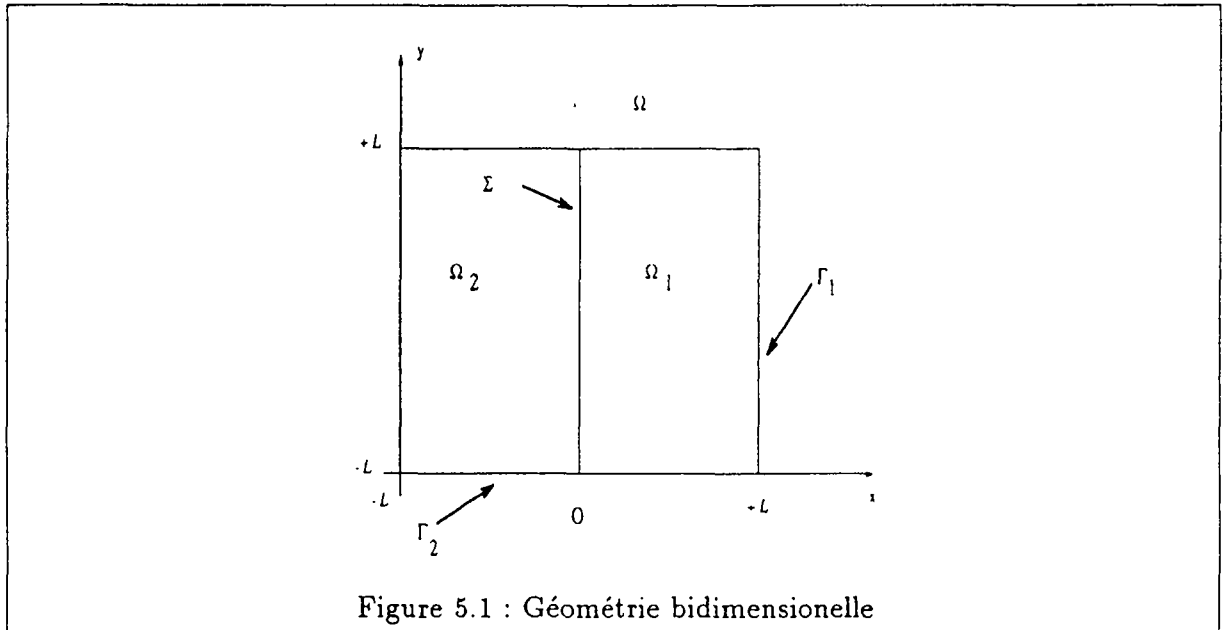
Nous voyons que en exactement  $n_0 = K_0 + 1$  itérations,

$$(5.5) \quad e_k^{n_0} \equiv 0 \quad \forall k.$$

*fin de la preuve*

## 5.2 Cas bidimensionnel d'un domaine rectangulaire. Etude spectrale.

Nous allons étudier la convergence de méthode de décomposition de domaine dans le cas où  $\Omega$  est un rectangle séparé en deux sous-rectangles  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  (figure 5.1).



Pour cela, nous allons procéder par étapes. Soit  $\varphi$  l'opérateur défini par :

$$(5.6) \quad \left[ \begin{array}{ll} L^2([-L, L]) & \rightarrow H^2([-L, L]), \\ f & \rightarrow \varphi(f) = u \text{ solution de} \\ -\frac{d^2}{dy^2} u = f, & \\ \left( \pm \frac{d}{dy} + i\omega \right) u = 0 \text{ en } \pm L. & \end{array} \right.$$

Nous montrerons que l'opérateur  $\varphi$  se diagonalise sur une "base" de vecteurs propres. Les difficultés viendront du fait que  $\varphi$  n'est pas hermitien. Grâce à cette étude, nous pourrons faire une séparation des variables, ce qui nous permettra d'étudier la décroissance par une approche de type 1-D. Résumons nos résultats sur  $\varphi$  dans le lemme suivant :

**Lemme 5.1** *il existe une famille de couple  $(u_p, c_p)_{p \in \mathbb{N}-0}$  de  $L^2([-L, L]) \times \mathbb{C}$ , telle que :*

(i)  $\forall p, \quad c_p^2 \varphi(u_p) = u_p$ . Chaque valeur propre est simple. Pour  $p$  impair, les  $c_p$  sont solutions de :

$$c_p \tan(c_p L) = i\omega, \quad c_p \in \mathbb{C}$$

et les fonctions propres associées sont :

$$u_p(y) = \cos(c_p y).$$

Pour  $p$  pair, les  $c_p$  solutions de :

$$i\omega \tan(c_p L) = -c_p, \quad c_p \in \mathbb{C}$$

et les fonctions propres associées sont :

$$u_p(y) = \sin(c_p y).$$

Les  $c_p$  solutions de chacune des deux équations transcendantes sont situés sur une même courbe :

$$(5.7) \quad \begin{cases} c = a + ib & a > 0, \quad b > 0 \\ a^2 + b^2 + \omega^2 - 2a\omega \coth(2bL) = 0 \end{cases}$$

Le comportement asymptotique des  $c_p$  est décrit par :

$$c_p = (p-1)\frac{\pi}{2L} + i\frac{\omega}{(p-1)\pi} + \text{des termes d'ordre supérieur en } \frac{1}{p}.$$

(ii) Les  $u_p$  vérifient des relations de "pseudo-orthogonalité" :

$$\begin{aligned} \forall p \neq q \quad & \int_{-L}^L \frac{d}{dy} u_p \frac{d}{dy} u_q + i\omega[u_p u_q](-L) + i\omega[u_p u_q](+L) \\ & = \int_{-L}^L u_p u_q = 0. \\ \forall p \quad & \int_{-L}^L \frac{d}{dy} u_p \frac{d}{dy} u_p + i\omega u_p^2(-L) + i\omega u_p^2(+L) \\ & = c_p^2 \int_{-L}^L (u_p)^2 \neq 0. \end{aligned}$$

(iii) Les  $(u_p)_{p \geq 1}$  forment un système libre total de  $L^2([-L, L])$ . Et  $\forall v \in L^2([-L, L])$ , notons :

$$\alpha_p = \int_{-L}^L v(y) u_p(y) dy.$$

Alors nous avons :

$$v \in H^s([-L, L])(=) \sum_{p \geq 1} |\alpha_p|^2 |c_p^2|^s \quad s < +\infty, \quad \forall s, \quad -1 \leq s \leq 1$$

**Preuve**

Nous renvoyons à l'annexe. *fin de la preuve*

**Remarque**

Le lemme (5.1) montre que, bien que  $\varphi$  ne soit pas un opérateur hermitien compact tel que le laplacien classique, il se comporte de la même façon d'un point de vue spectral.

Nous avons le lemme suivant :

**Lemme 5.2** *Les erreurs se comportent géométriquement.*

$$(5.8) \quad \forall p, \exists \beta_p \in C, |e_{k,p}^n(n)| \leq C(p) |\beta_p|^n, k = 1 \text{ ou } 2.$$

**Preuve**

Par intégration par partie, et en utilisant les propriétés des  $e^n$  et des  $u_p$ , nous avons :

$$(5.9) \quad \left[ \begin{array}{ll} \forall p & \\ \left( -\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 + c_p^2 \right) e_{k,p}^{n+1}(n) & = 0 \quad \text{dans } \Omega_1 \text{ ou } \Omega_2 \\ \left( \frac{d}{dn_k} + i\omega \right) e_{k,p}^{n+1} & = \left( -\frac{d}{dn_{k'}} + i\omega \right) e_{k',p}^n \quad \text{en } 0, k \neq k' \\ & = 0 \quad \text{en } \pm l \end{array} \right.$$

Nous allons désormais nous intéresser à un indice  $p$  particulier, ce qui nous autorise à ne plus noter  $p$ . Suivons la démarche du problème monodimensionnel.

$$(5.10) \quad c^2 = \omega^2 - c_p^2, \quad c = a - ib, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Notons que  $a, b$  et  $c$  n'ont pas la même signification que les  $a, b$  et  $c$  rencontrés lors de l'énoncé du lemme (5.1).

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} - c^2 \right) e_k^n = 0. \text{ dans } \Omega_k, k = 1, 2$$

Donc

$$(5.11) \quad e_k^n = a_k^n e^{icn} + b_k^n e^{-icn},$$

Ecrivons le système satisfait par  $a_1^n$  et  $b_1^n$  :

$$(5.12) \quad \begin{cases} (i\omega - ic)a_1^n e^{-icl} + (i\omega + ic)b_1^n e^{icl} = 0, \\ (i\omega + ic)a_1^n + (i\omega - ic)b_1^n = (i\omega + ic)a_2^{n-1} + (i\omega - ic)b_2^{n-1} \end{cases}$$

Notons:

$$(5.13) \quad Det = -(\omega + c)^2 e^{+icl} + (\omega - c)^2 e^{-icl}$$

Donc :

$$(5.14) \quad \begin{pmatrix} a_1^n \\ b_1^n \end{pmatrix} = \frac{1}{Det} \begin{pmatrix} -(\omega + c)^2 e^{+icl} & (c^2 - \omega^2) e^{+icl} \\ (\omega^2 - c^2) e^{-icl} & (\omega - c)^2 e^{-icl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^{n-1} \\ b_2^{n-1} \end{pmatrix}$$

De même :

$$(5.15) \quad \begin{cases} (i\omega - ic)a_2^n e^{-icl} + (i\omega + ic)b_2^n e^{icl} = 0, \\ (i\omega + ic)a_2^n + (i\omega - ic)b_2^n = (i\omega + ic)a_1^{n-1} + (i\omega + ic)b_1^{n-1} \end{cases}$$

Donc :

$$(5.16) \quad \begin{pmatrix} a_2^n \\ b_2^n \end{pmatrix} = \frac{1}{Det} \begin{pmatrix} -(\omega - c)^2 e^{-icl} & (\omega^2 - c^2) e^{-icl} \\ (c^2 - \omega^2) e^{icl} & -(\omega + c)^2 e^{icl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{n-1} \\ b_1^{n-1} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$(5.17) \quad \begin{pmatrix} a_1^n \\ b_1^n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_2^{n-1} \\ b_2^{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a_2^n \\ b_2^n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_1^{n-1} \\ b_1^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que :

$$(5.18) \quad \begin{cases} \det A = \det B = 0, \\ \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 1. \end{cases}$$

Cela nous incite à définir :

$$(5.19) \quad \begin{cases} e_1 = \begin{pmatrix} (c + \omega) e^{icl} \\ (c - \omega) e^{-icl} \end{pmatrix}, \text{ et} \\ e_2 = \begin{pmatrix} (c - \omega) e^{-icl} \\ (c + \omega) e^{icl} \end{pmatrix}. \end{cases} \text{ Alors}$$

$$(5.20) \quad \begin{cases} Ae_1 = e_1 \text{ et } Be_2 = e_2, \\ Ae_2 = \frac{(c^2 - \omega^2)(e^{icl} - e^{-icl})}{-(\omega + c)^2 e^{icl} + (\omega - c)^2 e^{-icl}} e_1, \text{ et} \\ Be_2 = \frac{(c^2 - \omega^2)(e^{icl} - e^{-icl})}{-(\omega + c)^2 e^{icl} + (\omega - c)^2 e^{-icl}} e_2. \end{cases}$$

De plus, les vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  sont indépendants. En effet :

$$\begin{aligned} & \det(e_1, e_2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (c + \omega) e^{icl} = (c - \omega) e^{icl} & \text{ou} \\ (c + \omega) e^{icl} = -(c - \omega) e^{icl} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} c(e^{icl} - e^{icl}) = -\omega(e^{icl} + e^{icl}) & \text{ou} \\ c(e^{icl} + e^{icl}) = \omega(e^{icl} - e^{icl}) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \operatorname{ctg}(cl) = i\omega & \text{ou} \\ i\omega \operatorname{tg}(cl) = -c \end{cases} \end{aligned}$$

Nous reconnaissons là les deux équations étudiées au lemme (5.1), dont nous savons que les solutions  $c$  sont situées dans le quart de plan  $Q$ ,

$$Q = \{c \in C, \quad c = a + ib, \quad a > 0, \quad b > 0\}$$

ou par symétrie dans :

$$Q' = \{c \in C, \quad c = a + ib, \quad a < 0, \quad b < 0\}.$$

Cela est incompatible avec la définition de  $c$  (5.10),

$$c^2 = \omega^2 - cp^2, \quad c = a - ib, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

C'est donc que  $(e_1, e_2)$  est une base de  $C^2$ . Exprimons toutes les données sur cette base.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \beta_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_p & 1 \end{pmatrix},$$

$$(5.21) \quad \begin{aligned} c^2 &= \omega^2 - cp^2, \quad c = a - ib, \quad a > 0, \quad b > 0 \\ \beta_p &= \frac{(c^2 - \omega^2)(e^{icl} - e^{-icl})}{-(\omega + c)^2 e^{icl} + (\omega - c)^2 e^{-icl}}. \end{aligned}$$

Remarquons que  $BAB = \beta_p^2 \times B$ . Donc :

$$\begin{pmatrix} a_2^{2p+1} \\ b_2^{2p+1} \end{pmatrix} = \beta_p^{2p} B \begin{pmatrix} a_1^0 \\ b_1^0 \end{pmatrix}. \text{ De même}$$

$$ABA = \beta_p^2 A \quad \text{donc}$$

$$\begin{pmatrix} a_1^{2p+1} \\ b_1^{2p+1} \end{pmatrix} = \beta_p^{2p} A \begin{pmatrix} a_2^0 \\ b_2^0 \end{pmatrix}$$

De plus,

$$\begin{pmatrix} a_1^{2p} \\ b_1^{2p} \end{pmatrix} = \beta_p^{2(p-1)} AB \begin{pmatrix} a_1^0 \\ b_1^0 \end{pmatrix}, \text{ et}$$

$$\begin{pmatrix} a_2^{2p} \\ b_2^{2p} \end{pmatrix} = \beta_p^{2(p-1)} AB \begin{pmatrix} a_2^0 \\ b_2^0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons bien

$$(5.22) \quad \exists C > 0, \quad |e_p^n| \leq |\beta_p|^n \times C. \quad C \text{ dépend de } p.$$

*fin de la preuve*

Nous allons maintenant étudier  $\beta_p$  dans le :

**Lemme 5.3**

$$(5.23) \quad \left[ \begin{array}{l} \forall p, \quad |\beta_p| < 1, \text{ de plus} \\ |\beta_p| = 1 - \frac{\omega^2 L^2}{(p\pi)^3} + O\left(\frac{1}{p^4}\right) \end{array} \right]$$

**Preuve**

$$\beta = \frac{(c^2 - \omega^2)(e^{icl} - e^{-icl})}{-(\omega + c)^2 e^{icl} + (\omega - c)^2 e^{-icl}} = \frac{x_1 + ix_2}{y_1 + iy_2},$$

où  $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$ .

$$\begin{aligned} x_1 &= (\omega^2 + b^2 - a^2) \times \cos al & \times \operatorname{sh} bl \\ &\quad - 2ab & \times \sin al & \times \operatorname{ch} bl, \\ x_2 &= (\omega^2 + b^2 - a^2) \times \sin al & \times \operatorname{ch} bl \\ &\quad + 2ab & \times \cos al & \times \operatorname{sh} bl, \\ y_1 &= (\omega^2 - b^2 + a^2) \times \cos al & \times \operatorname{sh} bl \\ &\quad + 2b\omega & \times \sin al & \times \operatorname{sh} bl \\ &\quad + 2a\omega & \times \cos al & \times \operatorname{ch} bl \\ &\quad + 2ab & \times \sin al & \times \operatorname{ch} bl, \\ y_2 &= (\omega^2 - b^2 + a^2) \times \sin(al) & \times \operatorname{ch}(bl) \\ &\quad + (2a\omega) & \times \sin(al) & \times \operatorname{sh}(bl) \\ &\quad - (2b\omega) & \times \cos(al) & \times \operatorname{ch}(bl) \\ &\quad - (2a\omega) & \times \cos(al) & \times \operatorname{sh}(bl). \text{ D'où} \end{aligned}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = [(\omega^2 + b^2 - a^2)^2] \times [\cos^2(al) \operatorname{sh}^2(bl) + \sin^2(al) \operatorname{ch}^2(bl)], \text{ et}$$

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 &= (\omega^2 + b^2 - a^2)^2 \times (\cos^2(al) \operatorname{sh}^2(bl) + \sin^2(al) \operatorname{ch}^2(bl)) \\ &\quad + (2ab)^2 \times (\sin^2(al) \operatorname{ch}^2(bl) + \cos^2(al) \operatorname{sh}^2(bl)) \\ &\quad + (2b\omega)^2 \times (\sin^2(al) \operatorname{sh}^2(bl) + \cos^2(al) \operatorname{ch}^2(bl)) \\ &\quad + (2a\omega)^2 \times (\sin^2(al) \operatorname{sh}^2(bl) + \cos^2(al) \operatorname{ch}^2(bl)) \\ &\quad + 2(\omega^2 - b^2 + a^2)(2ab) \times (\sin(al) \operatorname{ch}(bl) \cos(al) \operatorname{sh}(bl) \\ &\quad - \sin(al) \operatorname{ch}(bl) \cos(al) \operatorname{ch}(bl)) \\ &\quad + 2(\omega^2 - b^2 + a^2)(2a\omega) \times (\cos^2(al) \operatorname{ch}(bl) \operatorname{sh}(bl) + \sin^2(al) \operatorname{ch}(bl) \operatorname{sh}(bl)) \\ &\quad + 2(\omega^2 - b^2 + a^2)(2b\omega) \times (\cos(al) \sin(al) \operatorname{sh}^2(bl) - \cos(al) \sin(al) \operatorname{ch}^2(bl)) \\ &\quad + 2(2ab)(2a\omega) \times (\cos(al) \sin(al) \operatorname{ch}^2(bl) - \cos(al) \sin(al) \operatorname{sh}^2(bl)) \\ &\quad + 2(2ab)(2b\omega) \times (\cos^2(al) \operatorname{sh}(bl) \operatorname{ch}(bl) + \sin^2(al) \operatorname{sh}(bl) \operatorname{ch}(bl)) \\ &\quad + 2(2a\omega)(2b\omega) \times (\cos(al) \sin(al) \operatorname{sh}(bl) \operatorname{ch}(bl) - \cos(al) \sin(al) \operatorname{sh}(bl) \operatorname{ch}(bl)) \end{aligned}$$

Après réduction, nous trouvons :

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 &= x_1^2 + x_2^2 + [(2a\omega)^2 \operatorname{ch}(bl) + (2b\omega)^2 \cos(al)] \\ &\quad + \omega^2 [2a\omega \operatorname{sh}(2bl) - 2b\omega \sin(2al)] \\ &\quad + [b^2 + a^2] [2a\omega \operatorname{sh}(2bl) + 2b\omega \sin(2al)]. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que chacun des termes entre crochets est positif. Pour  $a$  et  $b$  positifs,

$$2a\omega \operatorname{sh}(2bl) \geq 2a\omega \times 2bl, \text{ , et}$$

$$| 2b\omega \sin(2al) | \leq 2b\omega \times 2al.$$

Donc les deux derniers crochets sont positifs. Notons  $f$  la fonction :

$$f(l) = (2a\omega)^2 \operatorname{ch}(2bl) + (2b\omega)^2 \cos(2al).$$

$$f(0) = 4\omega^2(a^2 + b^2) = 4\omega^2 |c|^2 > 0,$$

car  $c$  n'est jamais nul.

$$f'(l) = (2a\omega)^2 2b \operatorname{sh}(2bl) + (2b\omega)^2 (-2a) \sin 2al.$$

Or,

$$(2a\omega)^2 2b \operatorname{sh}^2 bl \geq (2a\omega)^2 (2b)^2 \times l \text{ et,}$$

$$| (2b\omega)^2 (-2a) \sin^2 al | \leq (2b\omega)^2 (2a) \times l \text{ d' où}$$

$$\forall l \geq 0, \quad f(l) \geq f(0).$$

Finalement,

$$y_1^2 + y_2^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + 4\omega^2 |c|^2, \text{ donc}$$

$$|\beta_p|^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2 + 4\omega^2 |c|^2} \text{ avec } |c| \neq 0, \text{ donc}$$

$$(5.24) \quad |\beta_p| < 1, \quad \forall p.$$

Intéressons-nous maintenant à la valeur asymptotique de  $|\beta_p|$  pour  $p$  grand.

$$c_p = (p-1) \frac{\pi}{2L} + i \frac{\omega}{2p\pi} + i \frac{\omega}{2p\pi} + \varepsilon(p).$$

$$c = a - ib, \quad a > 0, b > 0, \text{ avec}$$

$$c^2 = \omega^2 - cp^2 \quad \text{donc}$$

$$c = -i(p-1) \frac{\pi}{2L} + \frac{\omega}{2p\pi} + \varepsilon'(p).$$

$$\beta_p = \frac{(c^2 - \omega^2)(e^{icl} - e^{-icl})}{-(\omega + c)^2 e^{icl} + (\omega - c)^2 e^{-icl}}.$$

Le terme dominant de  $|\beta_p|$  est donc :





L'autre courbe est définie par l'équation (5.21) que nous mettons sous la forme :

$$z = |\beta_p| = \left| \frac{(c^2 - \theta^2)(e^{ic} - e^{-ic})}{-(c + \theta)^2 e^{-ic} + (\theta - c)e^{ic}} \right|, \quad c = x + iy(x).$$

Cette courbe représente les valeurs de  $\beta_p$  en fonction de  $p$ , car nous savons que la distribution des  $k_p$  est à peu près uniforme. Nous allons montrer maintenant le lemme suivant qui relie la décroissance de l'erreur à la régularité de l'erreur initiale.

**Lemme 5.4** *Supposons que :*

$$(5.25) \quad \left( \frac{\partial}{\partial n} + i\omega \right) e_k^0 \in H^s(\Sigma), \quad k = 1 \text{ ou } 2, \quad -\frac{1}{2} \leq s \leq 1$$

alors :

$$(5.26) \quad \forall \epsilon > 0, \exists c > 0, \exists N_0 > 0, \forall n \geq N_0, \\ \left\| e_{k'}^n \right\|_{H^1(\Omega_{k'})} \leq c \frac{1}{n^{\frac{2s+1}{3+\epsilon}}} \times \left\| \left( \frac{\partial}{\partial n} + i\omega \right) e_k^0 \right\|_{H^s(\Sigma)}$$

$k' = 1$  ou  $2$ ,  $k' = k$  pour  $n$  pair,  $k' \neq k$  pour  $n$  impair.

**Preuve**

Notons :

$$\left( \frac{\partial}{\partial n} + i\omega \right) e_{k'}^n(0, y) = \sum_p d_{p,k'}^n u_p(y)$$

Grâce à l'étude spectrale faite au lemme (5.2), nous connaissons le rayon spectral des matrices  $2 \times 2$  caractérisant la décroissance des  $e_{k,p}^n$ . Nous connaissons donc le rayon spectral de la matrice scalaire qui caractérise la décroissance de  $d_{p,k'}^n$ . C'est la même. Donc :

$$(5.27) \quad |d_{p,k'}^n| \leq |\beta_p|^n |d_{p,k}^0|.$$

Nous savons (4.4) que :

$$\exists c > 0, \quad \left\| e_{k'}^n \right\|_{H^1(\Omega_{k'})} \leq c \left\| \left( \frac{\partial}{\partial n} + i\omega \right) e_{k'}^n \right\|_{H^{1/2}(\partial\Omega_{k'})}.$$

Or grâce au lemme (5.1) nous connaissons l'expression générale d'une norme équivalente à  $H^s(\Sigma)$ . Donc :

$$\exists c > 0, \quad \left\| e_{k'}^n \right\|_{H^1(\Omega_{k'})}^2 \leq c \sum_p |d_{p,k'}^n|^2 \times \frac{1}{|cp|}.$$

D'où avec l'équation (5.27),

$$(5.28) \quad \exists c > 0, \quad \left\| e_{k'}^n \right\|_{H^1(\Omega_{k'})}^2 \leq c \sum_p |d_{p,k'}^0|^2 |\beta_p|^{2n} \times \frac{1}{|cp|}.$$

Nous connaissons l'expression asymptotique des  $c_p$  en fonction de  $p$ , donc :

$$\exists c > 0, \quad \|e_{k'}^n\|_{H^1(\Omega_{k'})}^2 \leq c \sum_p |d_{p,k}^0|^2 |\beta_p|^{2n} \times \frac{1}{p}$$

Nous connaissons également la valeur asymptotique de  $\beta_p$  en fonction de  $p$ , donc :

$$(5.29) \quad \exists c > 0, \quad \|e_{k'}^n\|_{H^1(\Omega_{k'})}^2 \leq c \sum_p |d_{p,k}^0|^2 \times \frac{1}{p} \times \left(1 - \frac{\omega^2 L^2}{(p\pi)^3}\right)^{2n}$$

L'hypothèse (5.25) se traduit en utilisant les mêmes arguments :

$$(5.30) \quad \exists c > 0, \quad \sum_p |d_{p,k}^0|^2 \times p^{2s} < +\infty.$$

Or :

$$\begin{aligned} & \sum_p |d_{p,k}^0|^2 \times \frac{1}{p} \times \left|1 - \frac{\omega^2 L^2}{(p\pi)^3}\right|^{2n} \\ &= \sum_{p \leq N} |d_{p,k}^0|^2 \times \frac{1}{p} \times \left|1 - \frac{\omega^2 L^2}{(p\pi)^3}\right|^{2n} + \sum_{p \geq N+1} |d_{p,k}^0|^2 \times \frac{1}{p} \times \left(1 - \frac{\omega^2 L^2}{(p\pi)^3}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Nous savons que :

$$\begin{aligned} & \sum_{p \geq N+1} |d_{p,k}^0|^2 \times \frac{1}{p} \times \left|1 - \frac{\omega^2 L^2}{(p\pi)^3}\right|^{2n} \\ & \leq \sum_{p \geq N+1} |d_{p,k}^0|^2 \times p^{2s} \times \frac{1}{p \times p^{2s}} \\ & \leq c \frac{1}{N^{1+2s}} \left\| \left( \frac{\partial}{\partial n} + i\omega \right) e_k^0 \right\|_{H^s(\Sigma)}^2. \end{aligned}$$

Choisissons  $n$  tel que :

$$2n = \left( \frac{\omega^2 L^2}{N^3 \pi^3} \right)^{-1} \times N^\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \text{ Alors}$$

$$\sum_{p=1}^N |d_{p,k}^0|^2 \times \frac{1}{p} \times \left(1 - \frac{\omega^2 L^2}{(p\pi)^3}\right)^{2n} < C \times e^{-N^\varepsilon}.$$

Rassemblons ces deux estimations.

$$\|e_{k'}^n\|_{H^1(\Omega_{k'})}^2 \leq C \times e^{-N^\varepsilon} + \frac{1}{N^{1+2s}} \left\| \left( \frac{\partial}{\partial n} + i\omega \right) e_k^0 \right\|_{H^s(\Sigma)}^2.$$

$$\text{avec } 2n = \left( \frac{\omega^2 L^2}{(p\pi)^3} \right)^{-1} \times N^\varepsilon$$

Faisons tendre  $N$  vers l'infini, il vient :

$$(5.31) \quad \| e_{k'}^n \|_{H^1(\Omega_{k'})}^2 \leq C \frac{1}{n^{\frac{1+2s}{3+\epsilon}}} \left\| \left( \frac{\partial}{\partial n} + i\omega \right) e_k^0 \right\|_{H^s(\Sigma)}^2$$

pour  $n$  suffisamment grand. *fin de la preuve*

**Corollaire 5.1** *Supposons que .*

$$e_k^0 \in H^s(\Omega_k), \quad k = 1 \text{ ou } 2, \quad \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{2}$$

*alors :*

$$(5.32) \quad \forall \epsilon > 0, \quad \exists c > 0, \quad \exists N > 0, \quad \forall n \geq N$$

$$\| e_{k'}^n \|_{H^1(\Omega_{k'})} \leq c \frac{1}{n^{\frac{2s-2}{3+\epsilon}}} \times \| e_k^0 \|_{H^s(\Omega_k)}$$

**Preuve**

C'est évident à partir du lemme précédent. *fin de la preuve*

Remarques :

- a) Pour une donnée initiale  $e^0$  dans  $H^{1+\epsilon}$ , nous sommes donc capable dans ce cas particulier de démontrer la convergence de la méthode et d'exhiber un taux de convergence. C'est un résultat plus fort que celui du théorème (4.1), qui a besoin d'une donnée initiale dans  $H^{3/2}$  et qui n'exhibe pas de taux de convergence.
- b) Nous sommes quand même en mesure de démontrer la convergence pour une donnée initiale dans  $H^1$ , pour le cas particulier du domaine rectangulaire divisé en deux sous-domaines. Il suffit de reprendre l'inégalité (5.28) utilisée avec  $s = -\frac{1}{2}$  pour voir qu'elle a un sens. Il apparait donc que la norme  $H^1$  de  $e^n$  est majorée par une série qui tend vers 0 grâce à un argument du type théorème de Lebesgue.
- c) Pour le processus itératif (4.84) défini à partir de l'équation de Laplace, nous savons qu'il converge vers la solution de (4.85). Nous pouvons dans le cas d'un domaine rectangulaire divisé en deux sous-domaines faire la même analyse des  $\beta_p$ , du fait de la ressemblance algébrique des processus (4.84) et (3.32). Nous avons alors pour le processus (4.84) associé à l'équation de Laplace :

$$|\beta_p| = 1 - \frac{4\omega L}{p\pi} + \dots,$$

dont la valeur asymptotique est meilleure que celle des  $\beta_p$  définis par le processus (3.32) associé à l'équation de Helmholtz (5.23):

$$|\beta_p| = 1 - \frac{\omega^2 L^2}{(p\pi)^3} + \dots$$

# Chapitre 6

## Extensions possibles

Les conditions de transmissions aux interfaces peuvent s'interpréter comme une approximation d'ordre un de la condition de transmission exacte. Il nous suffit de savoir qu'une caractérisation de cette condition exacte est qu'elle interdit des réflexions sur l'interface. Nous allons dans ce chapitre faire une étude simplifiée de l'opérateur de transmission exacte et de ses approximations dans le cas bidimensionnel décrit à la section (5.2).

### 6.1 Opérateur de transmission exact

Nous pouvons étudier cette condition exacte dans le cas bidimensionnel, où :

$$e_k^n(x, y) = \sum_p e_{k,p}^n(x) u_p(y), \quad k = 1 \text{ ou } 2.$$

Nous introduisons un opérateur de transmission exact  $T$ , et écrivons le processus satisfait par  $e_1^n$ :

$$\begin{aligned} (-\Delta - \omega^2) e_1^n &= 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial \nu_1} + T \right) e_1^n &= \left( -\frac{\partial}{\partial \nu_2} + T \right) e_2^{n-1} \text{ sur } \Sigma, \\ \left( \frac{\partial}{\partial \nu_1} + i\omega \right) e_1^n &= 0 \text{ sur } \Gamma_1, \end{aligned}$$

et par  $e_2^n$ :

$$\begin{aligned} (-\Delta - \omega^2) e_2^n &= 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial \nu_2} + T \right) e_2^n &= \left( -\frac{\partial}{\partial \nu_2} + T \right) e_2^{n-1} \text{ sur } \Sigma, \\ \left( \frac{\partial}{\partial \nu_2} + i\omega \right) e_2^n &= 0 \text{ sur } \Gamma_1. \end{aligned}$$

$T$  est l'opérateur de transmission exacte défini sur l'interface  $\Sigma$ . Inspirons-nous du cas monodimensionnel, cela nous permet d'écrire immédiatement, au moins formellement :

$$(6.1) \quad T v(x, y) = \sum_p i \sqrt{\omega^2 - c_p^2} \left( \int_{-L}^L v(x, y) u_p(y) \right) u_p(y).$$

Nous avons comme auparavant fait un choix de la racine carrée analytique telle que :

$$\operatorname{Re}(\sqrt{\omega^2 - c_p^2}) > 0.$$

Alors chaque  $e_{k,p}^n$  vérifie :

$$\begin{aligned} \left( -\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 + c_p^2 \right) e_{k,p}^{n+1} &= 0, \\ \left( \frac{d}{d\nu_k} + i\omega \right) e_{k,p}^{n+1} &= \left( -\frac{d}{d\nu_{k'}} + i\omega \right) e_{k',p}^n \text{ en } 0, \\ &= 0 \text{ en } \pm l, \end{aligned}$$

plus des conditions initiales. Un calcul identique à celui du lemme (5.2) nous permet de calculer des coefficients  $\beta_p$  :

$$|\beta_p| = \left| \frac{c - \omega}{c + \omega} e^{-bl} \right|, \quad c^2 = \omega^2 - c_p^2, \quad \operatorname{Re}(c) > 0.$$

La figure suivante (6.1) comparée avec la figure (5.2) montre que cette condition de transmission exacte fait apparaître de biens meilleurs comportements pour les  $|\beta_p|$ .

## 6.2 Approximations d'ordre $r$ de l'opérateur de transmission exact

Nous définissons alors un opérateur de transmissions d'ordre  $r$  :

$$(6.2) \quad T_r v(x, y) = \sum_p i P_r(c_p) \left( \int_{-L}^L v(x, y) u_p(y) \right) u_p(y).$$

où  $P_r$  est un polynôme de degré  $r$  défini comme la partie principale du développement limité à l'ordre  $r$  de  $\sqrt{(\omega^2 - z^2)}$ . Ce genre d'approximation est classique ([1]). L'opérateur  $T_r$  permet alors de définir une méthode itérative dont l'erreur vérifie :

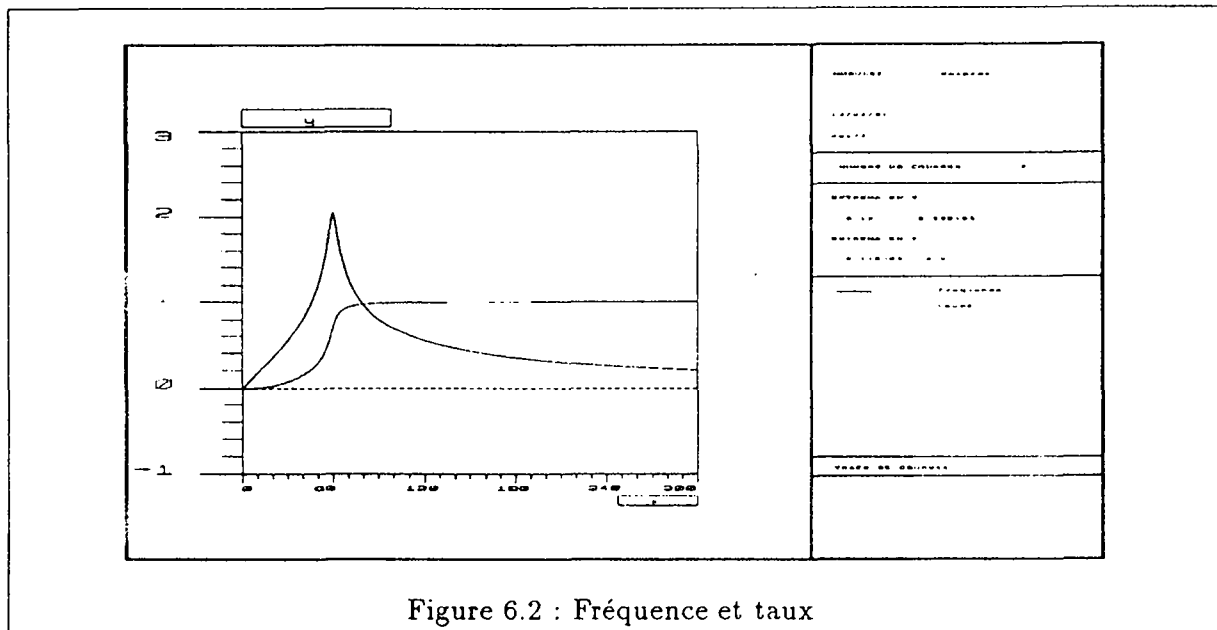
$$\begin{aligned} (-\Delta - \omega^2) e_1^n &= 0, \\ \left( \frac{\partial}{\partial \nu_1} + T_r \right) e_1^n &= \left( -\frac{\partial}{\partial \nu_2} + T_r \right) e_2^{n-1} \text{ sur } \Sigma, \\ \left( \frac{\partial}{\partial \nu_1} + i\omega \right) e_1^n &= 0 \text{ sur } \Gamma_1, \end{aligned}$$



le processus itératif est bien posé à chaque étape. Nous avons étudié numériquement les coefficients  $\beta_p$  qui valent :

$$|\beta_p| = \left| \frac{(c^2 - \omega^2) \left[ e^{-i\omega l} \left( \frac{\omega - c}{2\omega} \right) - e^{i\omega l} \frac{\omega + c}{2\omega} \right]}{-(\omega + c)^2 e^{i\omega l} \frac{(\omega + c)}{2\omega} + (\omega - c)^2 e^{-i\omega l} \left( \frac{\omega - c}{2\omega} \right)} \right|.$$

Les courbes sont présentées dans le schéma suivant (6.2), et doivent être comparées avec celle du schéma (5.2). Elles montrent une amélioration très faible du comportement des  $\beta_p$ .



### 6.3 Généralisations possibles

Une idée générale est donc d'approcher l'opérateur exact  $T$ , pour avoir un meilleur taux de convergence, quelque soit le mode choisi.

- a) Il est clair que les troncatures du développement limité en fonction de  $c_p$  de  $\omega \sqrt{1 - \frac{c_p^2}{\omega^2}}$  vont donner des opérateurs ayant de mauvaises propriétés de convergence pour  $|c_p| \geq \omega$ . En effet, nous savons que la série ne converge pas pour  $|c_p| \geq \omega$ . Cela est confirmé par l'étude comparative de  $T_2$  et  $T_1$  faite section (6.2).
- b) Dans l'objectif d'un traitement numérique, deux voies sont à explorer. Premièrement, une meilleure approximation de  $\omega \sqrt{1 - \frac{c_p^2}{\omega^2}}$ , même pour des  $|c_p|$  grands, à l'aide



d'approximants de nature différente de celle des troncatures de la série. Deuxièmement, nous pouvons envisager une troncature de l'opérateur de transmission exact. Tout ceci concerne l'avenir.

# Annexe A

## Etude de l'opérateur $\varphi$

Nous étudions ici l'opérateur  $\varphi$  présenté au lemme (5.1).

$$(A.1) \quad \left[ \begin{array}{l} L^2(\Omega) \mapsto H^2(\Omega), \quad \Omega = ]-L, L[ \\ f \mapsto \varphi(f) = u, \\ -\frac{d^2}{dx^2}u = f, \\ \left(\frac{d}{dx} + i\omega\right)u = 0 \quad \text{en } +L, \\ \left(-\frac{d}{dx} + i\omega\right)u = 0 \quad \text{en } -L \end{array} \right. \quad \text{solution de}$$

a) Nous allons en a) nous intéresser à la partie i) du lemme (5.1). Cherchons les vecteurs propres de  $\varphi$  sous la forme :

$$u(x) = a \cos(kx) + b \sin(kx), \quad k \in \mathbb{C}.$$

Éliminons tout de suite  $k = 0$  qui ne convient pas :

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= k^2 u \\ \iff \begin{cases} -ka \sin(kL) + (kh) \cos(kL) + i\omega(a \cos(kL) + h \sin(kL)) = 0 \\ -ka \sin(kL) - (kh) \cos(kL) + i\omega(a \cos(kL) - h \sin(kL)) = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} a(i\omega \cos(kL) - k \sin(kL) + b(i\omega \sin(kL) + k \cos(kL))) = 0 \\ a(i\omega \cos(kL) - k \sin(kL) - b(i\omega \sin(kL) + k \cos(kL))) = 0 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} u(x) = \cos(kx), \text{ avec } i\omega \cos(kL) - k \sin(kL) = 0 \\ \text{ou} \\ u(x) = \sin(kx), \text{ avec } i\omega \sin(kL) + k \cos(kL) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On est donc ramené à l'étude de deux équations transcendentes :

$$\begin{cases} k \tan(kL) = i\omega \\ i\omega \tan(kL) = -k \end{cases}$$

Posons  $k = a + ib$ , alors :

$$\tan(kL) = \frac{\tan(aL) + i\operatorname{th}bL}{1 - i\tan(aL)\operatorname{th}bL}$$

Donc

$$\begin{aligned} & k \tan(kL) = i\omega \\ \Leftrightarrow & (a + ib)(\tan(aL) + i\operatorname{th}(bL)) = i\omega(1 - i\tan(aL)\operatorname{th}(bL)) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} a \tan(aL) - b\operatorname{th}(bL) = \omega \tan(aL)\operatorname{th}(bL) \\ b \tan(aL) + a\operatorname{th}(bL) = \omega \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \tan(aL) = \frac{b\operatorname{th}(bL)}{a - \omega\operatorname{th}(bL)} \\ \tan(aL) = \frac{\omega - a\operatorname{th}(bL)}{b} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \tan(aL) = \frac{\omega - a\operatorname{th}(bL)}{b} \\ \frac{\omega - a\operatorname{th}(bL)}{b} = \frac{b\operatorname{th}(bL)}{a - \omega\operatorname{th}(bL)} \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & i\omega \tan(kL) = -k \\ \Leftrightarrow & i\omega(\tan(aL) + i\operatorname{th}(bL)) = -(1 - i\tan(aL)\operatorname{th}(bL)) \times (a + ib) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -\omega\operatorname{th}(bL) = -a - b\tan(aL)\operatorname{th}(bL) \\ \omega \tan(aL) = -b + a\tan(aL)\operatorname{th}(bL) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \tan(aL) = \frac{\omega\operatorname{th}(bL) - a}{b\operatorname{th}(bL)} \\ \tan(aL) = \frac{a\operatorname{th}(bL) - \omega}{b} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \tan(aL) = \frac{\omega\operatorname{th}(bL) - a}{b\operatorname{th}(bL)} \\ \frac{\omega\operatorname{th}(bL) - a}{b\operatorname{th}(bL)} = \frac{b}{a\operatorname{th}(bL) - \omega} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc pour l'étude de  $i\omega \tan(kL) = -k$  et  $k \tan(kL) = i\omega$ , on va étudier une seule équation car :

$$\frac{\omega\operatorname{th}(bL) - a}{b\operatorname{th}(bL)} = \frac{b}{a\operatorname{th}(bL) - \omega} \Leftrightarrow b^2 + a^2 + \omega^2 - a\omega(\operatorname{th}(bL) + \operatorname{coth}(bL)) = 0$$

$$\frac{\omega - a\operatorname{th}(bL)}{b} = \frac{b\operatorname{th}(bL)}{a - \omega\operatorname{th}(bL)} \Leftrightarrow b^2 + a^2 + \omega^2 - a\omega(\operatorname{th}(bL) + \operatorname{coth}(bL)) = 0$$

utilisant  $\operatorname{th}(bL) + \operatorname{coth}(bL) = 2\operatorname{coth}(2bL)$ , on étudie :

$$(A.2) \quad b^2 + a^2 + \omega^2 - 2a\omega\operatorname{coth}(2bL) = 0$$

$$(A.3) \quad \tan(aL) = \frac{\omega - a\operatorname{th}(bL)}{b} \text{ ou } \tan(aL) = \frac{b}{a\operatorname{th}(bL) - \omega}$$

L'équation (A.2) est celle d'une courbe sur laquelle se situent les couples  $(a, b)$  admissibles, et donne des renseignements sur le spectre l' $\infty$ . L'équation (A.3) donne la distribution des  $(a, b)$  solutions sur cette courbe.

Si  $k$  est solution de (A.2),  $-k$  est aussi solution de (A.2). Cependant nous nous intéressons aux valeurs propres de l'opérateur  $\varphi$  qui valent  $k^2$ . C'est pourquoi nous imposons une restriction supplémentaire sur  $k$ :

$$(A.4) \quad \text{im}(k) = b \geq 0.$$

L'équation (A.2) est un polynôme en  $a$ , dont le discriminant réduit est:

$$\Delta' = \omega^2 \coth^2(2bL) - b^2 - \omega^2$$

$$\Delta' = \omega^2(\coth^2(2bL) - 1) - b^2$$

$$\lim_{b \rightarrow 0+} \Delta'(b) = +\infty \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \Delta'(b) = -\infty \quad \frac{\partial \Delta'}{\partial b} < 0.$$

Donc :

$$\exists ! b_0 \in ]0, +\infty[ \quad \Delta'(b_0) = 0 \quad b_0 = b_0(\omega, L)$$

on étudiera le comportement de  $b_0$  plus tard. Donc  $k = a + ib$  est solution de (A.2) équivaut à:

$$\begin{cases} 0 \leq b \leq b_0 \\ a = \omega \coth(2bL) \pm \sqrt{\Delta'(b)}. \end{cases}$$

Nous notons  $\Gamma_1$  la branche de courbe définie dans le plan  $(b, a)$  par :

$$\begin{cases} 0 \leq b \leq b_0 \\ a = \omega \coth(2bL) + \sqrt{\omega^2(\coth^2(2bL) - 1) - b^2} \end{cases}$$

Nous notons  $\Gamma_2$  la branche de courbe définie dans le plan  $(b, a)$  par :

$$\begin{cases} 0 \leq b \leq b_0 \\ a = \omega \coth(2bL) - \sqrt{\omega^2(\coth^2(2bL) - 1) - b^2} = \frac{\omega^2 + b^2}{\omega \coth(2bL) + \sqrt{\Delta'(b)}}. \end{cases}$$

la courbe  $\Gamma$  est la réunion de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  et est présentée dans le schéma (A.1). Notons que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  se raccordent de façon  $C^1$  en  $b_0$ .

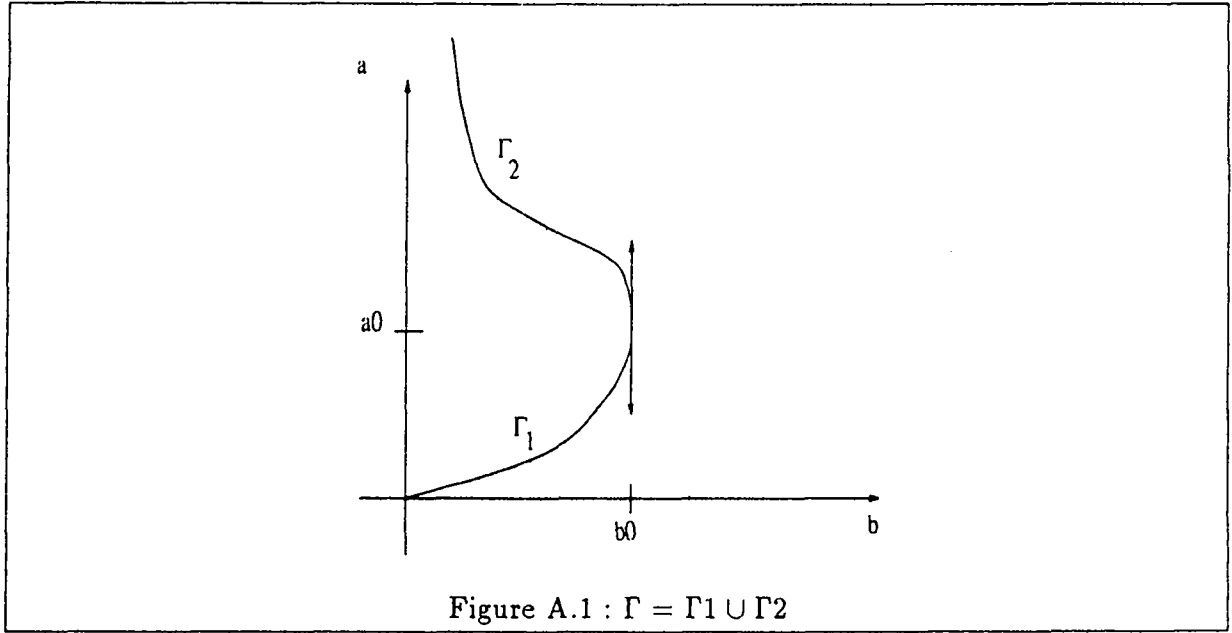
Etudions maintenant  $b_0$  en fonction de  $L$  :

$$\omega^2 \coth^2(2b_0 L) = b_0^2 + \omega^2$$

Pour  $\omega$  fixé, faisons augmenter  $L$ .

- $b_0 \rightarrow 0$  quand  $L \rightarrow +\infty$ . En effet, si  $b_0$  est minoré par  $\alpha > 0$ , alors  $L \rightarrow +\infty$  implique  $\omega^2 \geq \alpha^2 + \omega^2$ .
- Posons  $b_0 = \frac{1}{L} \times \mu_0$ . Alors  $\mu_0 \rightarrow 0$  quand  $L \rightarrow +\infty$ . En effet, si  $\mu_0$  est majoré par  $\mu_{max}$  alors  $L \rightarrow +\infty$  implique

$$\omega^2 \coth^2(2\mu_0) < \omega^2$$



- Posons  $a_0 = a(b_0) = \omega \coth(2b_0 L)$ . Alors  $a_0 > \omega$ , et

$$a_0 \longrightarrow \omega \text{ quand } L \longrightarrow +\infty$$

L'étude de l'équation (A.4) peut se réduire à l'étude de l'équation :

$$t = \frac{\omega \operatorname{th}(bL) - a}{b \operatorname{th}(bL)}$$

où  $\operatorname{th}(bL) = \coth(2bL) - \sqrt{\coth^2(2bL) - 1}$  (vient de  $\operatorname{th}(x) + \coth(x) = 2\coth(2x)$ )

sur  $(\Gamma_2)$

$$a = \omega \coth(2bL) + \omega \sqrt{\coth^2(2bL) - 1 - \frac{b^2}{\omega^2}}$$

$$t = -\omega \left( \frac{\sqrt{\coth^2(2bL) - 1} + \sqrt{\coth^2(2bL) - 1 - \frac{b^2}{\omega^2}}}{b \operatorname{th}(bL)} \right)$$

donc  $t < 0$ ,  $\frac{\partial t}{\partial b}$  est croissant,  $t \simeq -\omega \frac{\frac{1}{bL}}{bbL} \simeq -\frac{\omega}{c^2 b^3}$  quand  $b \rightarrow 0^+$

sur  $(\Gamma_1)$

$$\begin{aligned}
a &= \omega \coth(2bL) - \omega \sqrt{\coth^2(2bL) - 1 - \frac{b^2}{\omega^2}} \\
t &= -\omega \frac{\sqrt{\coth^2(2bL) - 1} + \sqrt{\coth^2(2bL) - 1 - \frac{b^2}{\omega^2}}}{b \operatorname{th}(bL)} \\
t &= -\omega \frac{\frac{b^2}{\omega^2}}{b \operatorname{th}(bL) \left( \sqrt{\coth^2(2bL)} + \sqrt{\coth^2(2bL) - 1 - \frac{b^2}{\omega^2}} \right)} \\
t &= -\frac{b \coth(bL)}{\omega \left( \sqrt{\coth^2(2bL)} + \sqrt{\coth^2(2bL) - 1 - \frac{b^2}{\omega^2}} \right)}.
\end{aligned}$$

Donc  $t < 0$ ,  $t \simeq -\frac{b}{\omega}$  quand  $b \rightarrow 0^+$ .

$$t(b_0) = -\coth(b_0 L),$$

donc  $t(b_0) \rightarrow -1$  quand  $L \rightarrow +\infty$

### finalement

1. pour avoir les solutions de  $i\omega \tan(kL) = -k$  :

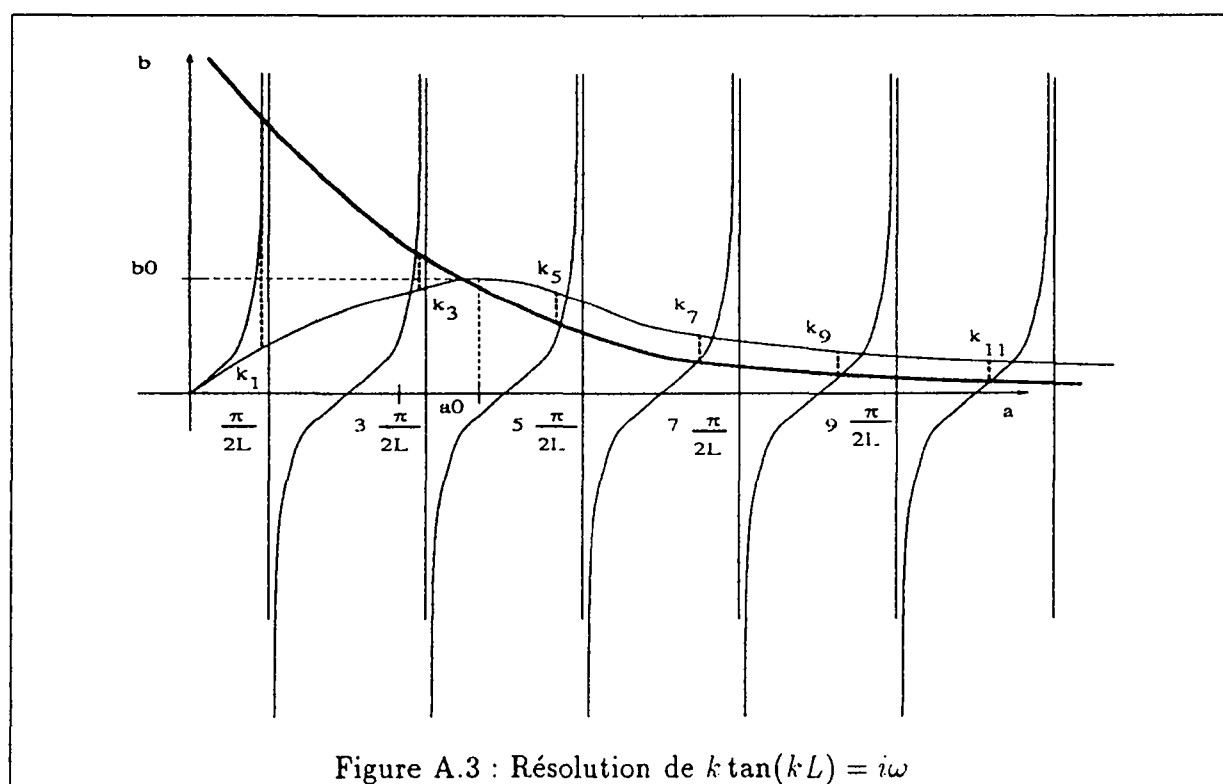
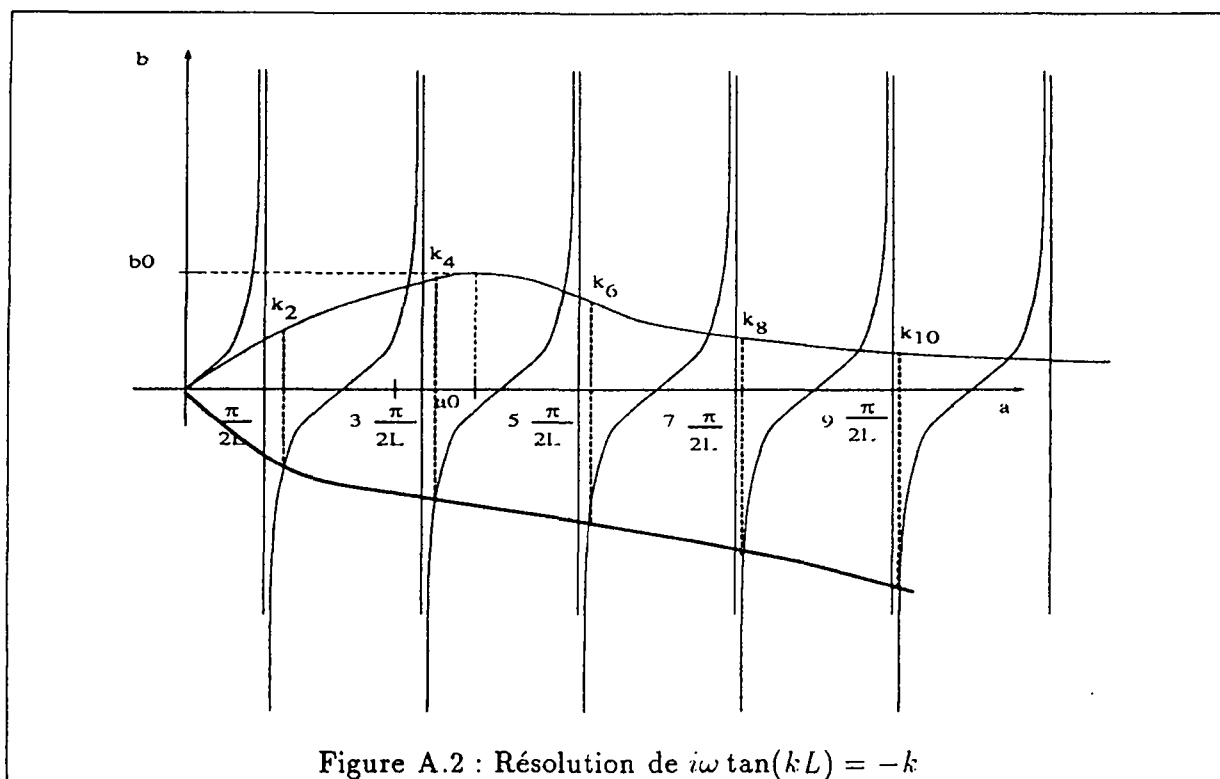
- on trace  $b = b(a)$  : courbe des  $(a, b)$  admissibles.
- on résoud graphiquement  $\tan(aL) = t$ .
- on projette les points d'intersection sur  $(\Gamma_1) \cup (\Gamma_2)$
- cela donne tout de suite des renseignements sur le spectre à l' $\infty$

$$k_{2p} \simeq (2p-1) \frac{\pi}{2L} + i \frac{\omega}{(2p-1)\pi}$$

2. pour avoir les solutions de  $k \tan(kL) = i\omega$  :

- même procédure, mais on résoud graphiquement  $tgaL = -\frac{1}{t}$
- $k_{2p+1} \simeq (2p) \frac{\pi}{2L} + i \frac{\omega}{2p\pi}$

Les deux schémas suivants (A.2) et (A.3) exposent cette résolution graphique.



b) Nous démontrons ici les propriétés énoncées dans la partie ii) du lemme (5.1), qui sont :

$$(A.5) \quad \forall p \geq 1 \quad \int_{-L}^{+L} u_p \times u_p \neq 0 \text{ et}$$

$$(A.6) \quad \forall p \geq 1, \quad \forall k \geq 1, \quad p \neq k, \quad \int_{-L}^{+L} u_p \times u_k = 0.$$

1<sup>er</sup> cas :

$$u_p = \cos(k_p x) \text{ avec } i\omega \cos(k_p L) - k_p \sin(k_p L) = 0$$

$$\int_{-L}^L \cos^2 k_p x = \int_{-L}^L \frac{1 + \cos(2k_p x)}{2} dx = L + \frac{1}{2k_p} \sin(2k_p L).$$

Donc  $\int_{-L}^L (u_p)^2 = 0$  équivaut au système :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} i\omega \cos(k_p L) - k_p \sin(k_p L) = 0 \\ 2k_p L + \sin 2k_p L = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} i\omega \cos k L - k \sin k L = 0 \\ \sin 2k L = -2k L \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} i\omega \cos k L - k \sin k L = 0 \\ (-k \sin k L) \times (i\omega \cos k L) = i\omega k^2 L \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} i\omega \cos k L \text{ et } -k \sin k L \text{ sont solutions de} \\ u^2 + i\omega k^2 L = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} -\omega^2 \cos^2 k L + i\omega k^2 L = 0 \\ k^2 \sin^2 k L + i\omega k^2 L = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} \sin^2 k L = -i\omega L \\ \cos^2 k L = +\frac{i k^2 L}{\omega} \end{cases} \\ & \implies 1 = k^2 \left( \frac{i L}{\omega} \right) - i\omega L \\ & \implies k^2 = \omega^2 - i \frac{\omega}{L} \end{aligned}$$

or  $k^2$  est la valeur propre de  $\cos kx$  pour l'opérateur initial, donc par intégration par partie:

$$\int_{-L}^{+L} \nabla u_p \cdot \overline{\nabla u_p} + i\omega u_p \cdot (-L) \overline{u_p}(-L) - i\omega u_p \cdot (+L) \overline{u_p}(+L) = k^2 \int_{-L}^{+L} u_p \cdot \overline{u_p}$$

$k^2$  ne peut donc avoir une partie imaginaire négative, l'équation initiale n'a donc pas de solution.



2<sup>ème</sup> cas :

$$u = \sin k_p x \text{ avec } k_p \cos k_p L + i\omega \sin k_p L = 0$$

$$\int_{-L}^L (\sin^2 k_p x) = \int_{-L}^L \frac{1 - \cos^2 k_p x}{2} dx = L - \frac{1}{2k_p} \sin(2k_p L)$$

le système à résoudre est :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} k \cos kL + i\omega \sin kL = 0 \\ \sin 2kL = +2kL \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} k \cos kL + i\omega \sin kL = 0 \\ k \cos kL \times i\omega \sin kL = i\omega k^2 L \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} k \cos kL \text{ et } i\omega \sin kL \text{ sont solutions de} \\ u^2 + i\omega k^2 L = 0 \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} k^2 \cos^2 kL = -i\omega k^2 L \\ -\omega^2 \sin^2 kL = -i\omega k^2 L \end{cases} \\ & \implies 1 = -i\omega + \frac{ik^2 L}{\omega} \\ & \implies k^2 = \omega^2 - i\frac{\omega}{L} \end{aligned}$$

ce qui est impossible pour les raisons évoquées au 1<sup>er</sup> cas.

$$\text{donc } \forall p \geq 1, \quad \int_{-L}^L u_p^2 \neq 0$$

nous allons également montrer que  $m \neq n \Rightarrow \int_{-L}^L u_m \times u_n = 0$  en effet  $\varphi$  est un opérateur symétrique pour le "pseudo-produit scalaire"  $\int_{-L}^L u \times v$ . Cela se vérifie sur la formulation variationnelle :

$$\int_{-L}^L \nabla u_n \nabla u_m + i\omega u_n(-L)u_m(L) + i\omega u_n(+L)u_m(+L) = k_n^2 \int_{-L}^L u_n u_m$$

de plus :

$$\int_{-L}^L \nabla u_m \nabla u_n + i\omega u_m(-L)u_n(L) + i\omega u_m(+L)u_n(+L) = k_m^2 \int_{-L}^L u_m u_n$$

d'où :

$$0 = (k_n^2 - k_m^2) \int_{-L}^L u_n u_m$$

donc :

$$n \neq m \Rightarrow \int_{-L}^L u_n u_m = 0$$

c) Nous allons à présent montrer la partie iii) du lemme (5.1), et tout d'abord que l'ensemble des  $u_p$  constitue un système complet de  $L^2(]-L, L[)$ . Notons  $(u_p, k_p)$  les couples vecteur propre, valeur propre déjà étudiés. Nous savons que :

$$\begin{aligned} u_{2p} &= \sin(k_{2p}x) & p \geq 1, \\ u_{2p+1} &= \cos(k_{2p+1}x) & p \geq 0, \\ k_p &= (p-1) \times \frac{\pi}{2L} + i \frac{\omega}{2p\pi} + \varepsilon(p), \\ \varepsilon &\text{ au plus en } \frac{1}{p^2}. \end{aligned}$$

Notons :

$$\begin{aligned} v_{2p} &= \sin\left((2p-1)\frac{\pi}{2L}x\right) & p \geq 1, \\ v_{2p+1} &= \cos\left((2p)\frac{\pi}{2L}x\right) & p \geq 0. \end{aligned}$$

Les  $v_p$  constituent une base hilbertienne de  $L^2(]-L, L[)$ , car sont les vecteurs propres de l'application hermitienne qui associe  $u$  à  $f$ ,

$$\begin{aligned} L^2 &\longrightarrow H^1, \\ f &\longrightarrow u, \\ -\frac{d^2}{dx^2}u + u &= f & \text{ dans } ]-L, L[, \\ \frac{\partial}{\partial x}u &= 0 & \text{ en } +L \text{ et } -L, \end{aligned}$$

La valeur propre associé à  $v_p$  est  $(\frac{(p-1)\pi}{2L})^2 + 1$ . Il est connu [11] que

$$\sum_p |(u, v_p)|^2 = \|u\|_{L^2}^2$$

et

$$\sum_p \left(\frac{(p-1)\pi}{2L}\right)^2 + 1 |(u, v_p)|^2 = \|u\|_{H^1}^2$$

Le développement de  $k_p$  en  $\frac{1}{p}$  montre que :

$$\exists c > 0, \forall p, \int_{-L}^L |u_p - v_p|^2 \leq \frac{C}{p^2}, \text{ donc}$$

$$\sum_{p \geq 1}^{\infty} \|u_p - v_p\|_{L^2} < +\infty$$

Nous utilisons cette propriété pour définir l'opérateur  $B$ ,

$$\begin{aligned} B : L^2() - L, L[] &\longrightarrow L^2() - L, L[], \\ f &\longmapsto B(f) = \sum_{p \geq 1} (f, v_p)_{L^2} u_p. \end{aligned}$$

Cet opérateur est bien défini car :

$$\forall f \in L^2, \sum_{p \geq 1} (f, v_p)_{L^2} (u_p - v_p)$$

existe grâce au critère de Cauchy. Donc :

$$B(f) = \sum_{p \geq 1} (f, v_p) (u_p - v_p) + f$$

existe bien.

Cela montre de plus que  $B = I + (B - I)$  où  $B - I$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt donc est compact. Nous allons donc utiliser l'alternative de Fredholm. Montrons que  $B$  est injectif. Utilisons les propriétés (A.5) et (A.6) pour montrer que  $B$  est injectif :

$$\begin{aligned} B(f) = 0 &\implies \sum_{p \geq 1} (f, v_p) u_p = 0 \\ &\implies \int_{\Omega} (u_{p0} \times \sum_{p \geq 1} (f, v_p) u_p) = 0 \quad \forall p0 \\ &\implies \int_{\Omega} (u_{p0})^2 \times (f, v_{p0}) = 0 \quad \forall p0 \\ &\implies (f, v_{p0}) = 0 \quad \forall p0 \\ &\implies f = 0 \end{aligned}$$

$B$  est injectif et  $B = I + (B - I)$  avec  $(B - I)$  compact. L'alternative de Fredholm montre que  $B$  est surjectif :

$$\forall g \in L^2, \quad \exists f \in L^2, \quad g = \sum_{p \geq 1} (f, v_p) u_p$$

$u_p$  est donc un système total, libre d'après l'injectivité de  $B$ . Intéressons-nous enfin à la partie finale du lemme (5.1), c'est-à-dire :

soit  $v \in L^2() - L, L[]$

Soient  $\alpha_p$  les nombres complexes :

$$\alpha_p = \int_{-L}^L v(y) u_p(y) dy,$$

alors :

$$v \in H^s() - L, L[] \iff \sum_{p \geq 1} |\alpha_p|^2 |c_p^2|^{2s} < +\infty$$

pour cela nous introduisons l'opérateur  $\Pi$  :

$$\begin{aligned} \Pi : L^2() - l, l[] &\longrightarrow l^2 \\ V &\longmapsto (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \end{aligned}$$

Montrons que  $\Pi$  est un opérateur correctement défini. Nous utilisons la base de vecteurs propres orthogonaux de  $L^2(v_p)$ , développée au cas b). Alors :

$$\beta_p = \int_{-L}^L v(y) v_p(y) dy$$

$$\|v\|_{L^2}^2 = \sum_{p \geq ?} |\beta_p|^2,$$

$$\text{donc } (\beta_p) \in l^2$$

Or :

$$\alpha_p - \beta_p = \int_{-L}^L v(y) [u_p(y) - v_p(y)] dy.$$

Donc :

$$|\alpha_p - \beta_p|^2 \leq \|v\|_{L^2}^2 \|u_p - v_p\|_{L^2}^2.$$

Grâce aux propriétés de  $(u_p)$  et  $(v_p)$  vu au cas b) de l'annexe, nous savons que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \|u_p - v_p\|^2 = c < +\infty$$

Donc :

$$(\alpha_p - \beta_p) \in l^2.$$

Or :

$$(\alpha_p) = (\beta_p) + (\alpha_p - \beta_p),$$

donc :

$$(\alpha_p) \in l^2 \text{ et } \sum (\alpha_p)^2 \leq (c+1) \|u\|_{L^2}^2.$$

$\Pi$  est donc correctement défini et est continu.

- Les  $u_p$  forment un système libre total de  $L^2(-L, L)$  donc  $\Pi$  est injectif.
- Montrons que  $\Pi$  est surjectif. Soit  $(\alpha_p)$  un élément de  $L^2$ . Nous allons montrer que les sommes partielles :

$$\sum_n^m \alpha_p u_p$$

vérifient le critère de Cauchy dans  $L^2(-L, L)$ .

$$\sum_n^m \alpha_p u_p = \sum_n^m \alpha_p v_p + \sum_n^m \alpha_p (u_p - v_p)$$

$$\left\| \sum_n^m \alpha_p v_p \right\|_{L^2}^2 = \sum_n^m |\alpha_p|^2$$

grâce à l'orthogonalité des  $v_p$ .

$$\left\| \sum_n^m \alpha_p (u_p - v_p) \right\|_{L^2}^2 \leq \sum_n^m |\alpha_p|^2 \times \sum_n^m \|u_p - v_p\|_{L^2}^2$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz.  $\sum_n^m |\alpha_p|^2$  vérifie le critère de Cauchy car  $(\alpha_p) \in l^2$ .  $\sum_n^m \|u_p - v_p\|_{L^2}^2$  vérifie également le critère de Cauchy. Nous avons donc le résultat : les sommes partielles  $\sum_n^m \alpha_p u_p$  vérifient le critère de Cauchy dans  $L^2(-L, L)$ .  $L^2(-L, L)$  est un espace de Hilbert donc la série  $\sum_{p=1}^{+\infty} \alpha_p u_p$  converge dans  $L^2(-L, L)$  vers un élément  $v$ . Et donc  $\Pi(v) = (\alpha_p)$ . Cela montre la surjectivité de  $\Pi$ .

- $\Pi$  est une application bijective continue d'un hilbert dans un autre.  $\Pi$  est donc bicontinu :

$$\exists c > 0, \quad \forall v \in L^2, \quad \|v\|_{L^2}^2 \leq c \left( \sum_{p \geq 1} |\alpha_p|^2 \right)$$

- Revenons maintenant à la proposition :

$$v \in H^S \iff \sum_{p \geq 1} |\alpha_p|^2 |c_p|^{2s} < +\infty$$

pour  $1 \leq s \leq 1$ . Nous venons en fait de monter ce résultat pour  $S = 0$ .

Nous étendons maintenant ce résultat pour  $S = 1$ . Nous avons besoin des vecteurs

$$w_{2p} = \cos\left((2p-1)\frac{\pi}{2L}x\right) \quad p \geq 1.$$

$$w_{2p+1} = \sin\left((2p)\frac{\pi}{2L}x\right) \quad p \geq 1.$$

Les  $w_p$  constituent une base hilbertienne de  $L^2(-L, L)$ , car sont les vecteurs propres de l'application hermitienne qui associe  $u$  à  $f$ ,

$$L^2 \cap V \longrightarrow H^1 \cap V,$$

$$f \longrightarrow u,$$

$$-\frac{d^2}{dx^2}u + u = f \quad \text{dans } ]-L, L[,$$

$$u = 0 \quad \text{en } +L \text{ et } -L.$$

Nous pouvons développer  $u_p$  en

$$u_{2p+1} = v_{2p+1} - \frac{i\omega}{(p-1)\pi} x w_{2p+1} + \frac{1}{(2p+1)^2} \varepsilon_{2p+1}$$

et

$$u_{2p} = v_{2p} - \frac{i\omega}{(p-1)\pi} x w_{2p} + \frac{1}{(2p)^2} \varepsilon_{2p}$$

où  $\varepsilon_p(x)$  est uniformément borné en fonction  $p$  et  $x$  pour  $p$  grand.

Pour toute fonction  $u$  dans  $L^2$ , nous avons le développement

$$(u, u_p) = (u, v_p) \pm \frac{i\omega}{(p-1)\pi} (xu, w_p) + \frac{1}{p^2} \dots$$

. La valeur  $|c_p|^2$  est asymptotiquement équivalent à la valeur propre associée à  $v_p$ , c'est à dire

$$|c_p|^2 \leq C_1 \left( \frac{(p-1)\pi}{2L} \right)^2 + 1$$

et

$$\left( \frac{(p-1)\pi}{2L} \right)^2 + 1 \leq C_2 |c_p|^2.$$

Prenons une fonction  $u$  dans  $L^2$ . Alors

$$|(u, u_p)| \leq |(u, v_p)| + C \frac{1}{p} |(xu, w_p)| + C \frac{1}{p^2} \dots$$

et

$$\begin{aligned} |(u, u_p)|^2 &\leq |(u, v_p)|^2 + C \frac{1}{p} |(xu, w_p)| |(u, v_p)| \\ &+ C \frac{1}{p^2} (|(u, v_p)| + |(xu, w_p)|^2) + C \frac{1}{p^3} |(xu, w_p)| + C \frac{1}{p^4} O(1). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $u \in H^1$ , alors

$$\sum_p \left( \frac{(p-1)\pi}{2L} \right)^2 + 1 |(u, v_p)|^2 \leq +\infty.$$

En prenant le développement précédent et en observant chaque terme, nous avons

$$\sum_p |c_p|^2 |(u, u_p)|^2 \leq +\infty.$$

En ce qui concerne la réciproque, nous écrivons

$$|(u, v_p)| \leq |(u, u_p)| + C \frac{1}{p} |(xu, w_p)| + C \frac{1}{p^2} \dots$$

De la même manière, nous avons

$$\sum_p |c_p|^2 |(u, u_p)|^2 \leq +\infty$$

implique

$$\sum_p \left( \frac{(p-1)\pi}{2L} \right)^2 + 1 |(u, v_p)|^2 \leq +\infty.$$

c'est à dire  $u \in H^1$ .

Par interpolation nous avons le résultat pour tout  $s$  réel positif compris entre 0 et 1. Puis par dualité, nous obtenons le résultat pour tout  $s$  réel entre -1 et 1.

# Bibliographie

- [1] A. Bamberger, P. Joly, and J.E. Roberts. Second order absorbing boundary conditions for the wave equation: a solution for the corner problem. Technical Report 644, INRIA, 1987.
- [2] A. Bayliss and E. Turkel. Radiation boundary conditions for wave like equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33:707–725, 1980.
- [3] J. H. Bramble, J. E. Pasciak, and A. H. Schatz. The construction of preconditionners for elliptic problems by substructuring. *Math. Comp.*, 46:361–369, 1986.
- [4] H. Brezis. *analyse fonctionnelle*. Masson, 1983.
- [5] C. Clement, M. Kern, and C. Rubin. Solution of the 3d helmholtz equation by conjugate gradients. In *Copper mountain conference on iterative methods*, 1990.
- [6] R. Dautray and J.L. Lions. *Analyse numérique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, volume 1. Masson, 1984.
- [7] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*, volume 224. Springer Verlag, 1983.
- [8] R. Glowinsky and M.F. Wheeler. Domain decomposition and mixed finite element methods for elliptic problems. In SIAM, editor, *First international symposium on domain decomposition method for partial differential equations*, pages 144–171, 1988.
- [9] C. I. Goldstein. The finite element method with non uniform mesh sizes applied to the exterior Helmholtz problem. *Numer. Math.*, 38:61–82, 1981.
- [10] L. Hormander. *Linear partial differential operators*, volume 116. Springer Verlag, 1964.
- [11] J.L. Lions. *Analyse numérique*. Ecole polytechnique, 1984.
- [12] P. L. Lions. On the schwartz alternating method 3. To appear in *Domain Decomposition Method*, SIAM, 1990.

- [13] P. L. Lions. On the Schwartz alternating method 1. In SIAM, editor, *First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations*, pages 1–42, 1988.
- [14] P. L. Lions. On the Schwartz alternating method 2: stochastic interpretation and order properties. In SIAM, editor, *Domain decomposition methods*, pages 47–70, 1989.
- [15] J. C. Nedelec. Curved finite element methods for the solution of singular integral equations on surfaces on  $R^n$ . *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 8:61–80, 1971.
- [16] J.C. Nedelec. Cours de l'école d'été d'analyse numérique. Technical report, CEA-EDF-IRIA, 1977.



**ISSN 0249 - 6399**